МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Тобольский педагогический институт им. Д.И.Менделеева (филиал)
Тюменского государственного университета

УТВЕРЖДАЮ
Директор
________________ Шилов С.П
«28» мая 2020 г.

АЛГЕБРА

Рабочая программа для обучающихся по направлению подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Профили: математика; информатика
Форма обучения: очная

Малышева Е.Н., Валицкас А.И. Алгебра. Рабочая программа для обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки): математика; информатика, форма обучения очная. Тобольск, 2020.

Рабочая программа дисциплины опубликована на сайте ТюмГУ: Алгебра [электронный ресурс] / Режим доступа: https://tobolsk.utmn.ru/sveden/education/#

1. Пояснительная записка

Цель формирование систематических знаний в области алгебры и ее методов, овладение современным математическим аппаратом, необходимым для реализации профессиональной деятельности по профилю подготовки.

Задачи:

− формирование у студентов системы представлений о понятиях и фактах дисциплины «Алгебра», об алгебраических методах и возможностях их применения для решения математических и прикладных задач;

− познакомить с современными направлениями развития алгебры, формирование уровня математической культуры, достаточного для осознанной ориентации в многообразии учебной литературы по школьному и вузовскому курсу алгебры;

− дать базовое теоретическое обоснование обязательных разделов школьного курса алгебры, необходимых для формирования профессиональных компетенций.

1.1. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Алгебра» относится к обязательным дисциплинам вариативной части блока Б1. Учебным планом предусмотрено изучение данной дисциплины в течение 1-3 семестров.

Для освоения дисциплины используются знания, умения и виды деятельности, сформированные в процессе изучения предметов «Математика», «Информатика» на предыдущем уровне образования. Дисциплина «Математический анализ», наряду с дисциплинами «Алгебра» и «Геометрия», является фундаментом высшего математического образования. Знания и умения, формируемые в процессе изучения дисциплины «Математический анализ», будут использоваться в дальнейшем при освоении дисциплин вариативной части профессионального цикла: «Теория функций», «Функциональный анализ», «Дифференциальные уравнения», «Физика» и др.

1.2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения данной дисциплины

Процесс изучения данной дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО и ОП ВО по данному направлению подготовки:

ОК-3 способность использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве;

ПК-4 способность использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемого учебного предмета.

Код и наименование компетенции	Компонент (знаниевый/функциональный)
ОК-3 способность использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве	Знает основные понятия и доказательства фактов основных разделов курса (алгебраические структуры, линейная алгебра, алгебра многочленов).
	Умеет строить примеры групп, колец, полей, векторных пространств и связанных с ними объектов; выполнять действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме; устанавливать линейную зависимость или независимость систем векторов; находить базис и размерность векторных пространств и их

Код и наименование компетенции	Компонент (знаниевый/функциональный)
	подпространств, координаты векторов; решать типовые задачи.
ПК-4 способность использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемого учебного предмета	Знает области приложения знаний по алгебре в содержании школьного курса математики
	Может составить алгоритм решения задачи по алгебре для использования в учебном процессе и пояснить решение типовых школьных задач

2. Структура и трудоемкость дисциплины

Таблица 1

Вид учебной работы	**Всего часов**	**Часов в семестре**		
		1	**2**	**3**
Общая трудоемкость **зач. ед.**	9	3	3	3
час	**324**	**108**	**108**	**108**
Из них:				
Часы аудиторной работы (всего):	104	36	32	36
Лекции	52	18	16	18
Практические занятия	52	18	16	18
Лабораторные / практические занятия по подгруппам				
Часы внеаудиторной работы, включая самостоятельную работу обучающегося	220	72	76	72
Вид промежуточной аттестации (зачет, диф. зачет, экзамен)		экзамен	экзамен	экзамен, контрольная работа

3. Система оценивания

3.1. Текущий контроль

Текущий контроль осуществляется в форме собеседования по контрольным вопросам, решения проверочных работ, тестирования.

Оценивание результатов освоения дисциплины может осуществляться в рамках балльной системы, разработанной преподавателем и доведенной до сведения обучающихся на первом занятии

№ темы	Формы оцениваемой работы	Количество часов	Макс. количество баллов
1 семестр			
Лекции 1-9	Конспекты Вопросы к коллоквиуму.	18	18
Практические занятия 1-9	Решение задач. Решение задачи и объяснение решения у доски.	18	45

№ темы	Формы оцениваемой работы	Количество часов	Макс. количество баллов
	Коллоквиум.		
Самостоятельная работа	Домашние задания. Проверочные работы. Тест. Подготовка к экзамену	72	37
	Итого	108	100
2 семестр			
Лекции 1-8	Конспекты Вопросы к коллоквиуму.	16	16
Практические занятия 1-8	Решение задач. Решение задачи и объяснение решения у доски. Коллоквиум.	16	45
Самостоятельная работа	Домашние задания. Проверочные работы. Подготовка к экзамену	76	39
	Итого	108	100
3 семестр			
Лекции 1-9	Конспекты Вопросы к коллоквиуму.	18	18
Практические занятия 1-9	Решение задач. Решение задачи и объяснение решения у доски. Коллоквиум.	18	45
Самостоятельная работа	Домашние задания. Проверочные работы. Подготовка к экзамену	72	27
	Контрольная работа.		10
	Итого	108	100

3.2. Промежуточный контроль

Промежуточная аттестация проходит в форме собеседования по вопросам к зачету или экзамену и решения контрольной работы.

1 семестр (экзамен) – собеседование билетам (теоретический вопрос и решение примера);

2 семестр (экзамен) – собеседование по вопросам и решение задачи;

3 семестр (экзамен) – собеседование билетам и решение задачи (теоретический вопрос) и решение контрольной работы.

Промежуточная аттестация может быть выставлена с учетом совокупности баллов, полученных обучающимся в рамках текущего контроля.

Перевод баллов в оценки:

Вид аттестации	Соответствие рейтинговых баллов и академических оценок			
	Зачтено	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Экзамен	61-100 баллов	61-75 баллов	76-90 баллов	91-100 баллов

4. Содержание дисциплины

4.1. Тематический план дисциплины

Таблица 2

№	Темы	Объем учебной нагрузки (час.)				
		Всего	Виды аудиторной работы			Иные виды контактной работы
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные / практические занятия по подгруппам	
	1 семестр					
1	Бинарные алгебраические операции. Группы	12	2	2		
2	Кольца и поля. Гомоморфизм и изоморфизм алгебраических структур	36	6	6		
3	Числовые системы. Поле комплексных чисел	12	2	2		
4	Действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме	24	4	4		
5	Векторное пространство	24	4	4		
	Итого	108	18	18		
	2 семестр					
1	Векторное пространство	14	2	2		
2	Определители	14	2	2		
3	Системы линейных уравнений	28	4	4		
4	Матрицы и операции над ними	52	8	8		
	Итого	108	16	16		
	3 семестр					
1	Линейные отображения векторных пространств	12	2	2		
2	Матрица линейного оператора	12	2	2		
3	Алгебра линейных операторов и её изоморфизм полной матричной алгебре.	12	2	2		
4	Кольцо K[x] многочленов от одного переменного	36	6	6		
5	Многочлены от нескольких переменных	12	2	2		
6	Многочлены над Q, R, C	24	4	4		
	Итого за 3 семестр	108	18	18		
	Итого	**488**	**52**	**52**		

4.2. Содержание дисциплины по темам

4.2.1. Лекции

1 семестр

Тема 1. Бинарные алгебраические операции. Группы

Бинарные алгебраические операции, их свойства. Аддитивная и мультипликативная формы записи бинарной операции. Группоид. Полугруппа. Моноид. Группа. Примеры. Простейшие свойства полугрупп, групп. Группа подстановок.

Тема 2. Кольца и поля. Гомоморфизм и изоморфизм алгебраических структур

Гомоморфизм и изоморфизм групп. Понятие кольца. Примеры колец.

Понятие поля. Примеры полей. Простейшие свойства колец, полей. Гомоморфизм и изоморфизм колец, полей.

Тема 3. Числовые системы. Поле комплексных чисел

Натуральные числа. Метод математической индукции Поле комплексных чисел. Алгебраическая форма записи комплексного числа.

Геометрическое представление комплексных чисел и операций над ними Тригонометрическая форма записи комплексного числа.

Тема 4. Действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме

Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме записи. Корни из комплексных чисел и двучленные уравнения.

Тема 5. Векторное пространство

Определение и простейшие свойства векторных пространств. Примеры. Подпространство. Критерий подпространства. Линейная оболочка системы векторов.

Линейная зависимость и независимость систем векторов, свойства.

2 семестр

Тема 1. Векторное пространство

Эквивалентные системы векторов. Элементарные преобразования. Базис и ранг конечной системы векторов. Базис и размерность векторного пространства.

Тема 2. Определители

Определители второго и третьего порядка. Формулы Крамера. Определители n-го порядка, их свойства. Миноры и алгебраические дополнения, разложение определителя по строке (столбцу), вычисление определителей.

Тема 3. Системы линейных уравнений

Первоначальные сведения о системах линейных уравнений (с.л.у.) Элементарные преобразования и равносильность систем линейных уравнений. Ранг матрицы. Равенство строчечного и столбцового рангов матрицы. Критерий совместности и определенности с.л.у.

Метод Гаусса. Пространство решений однородной с.л.у. Фундаментальная система решений. Связь решений неоднородной и соответствующей однородной с.л.у. Линейное многообразие решений с.л.у.

Тема 4. Матрицы и операции над ними

Алгебраические операции над матрицами и их свойства. Векторное пространство матриц одинаковой размерности mxn.

Кольцо квадратных матриц n-го порядка.

Обратимые матрицы, свойства. Неособенная матрица. Элементарные матрицы.

Критерий обратимости. Нахождение обратной матрицы с помощью присоединения единичной матрицы.

Вычисление обратной матрицы с помощью присоединенной. Матричные уравнения.

3 семестр

Тема 1: Линейные отображения векторных пространств.

Линейные отображения векторных пространств, их свойства. Примеры. Ядро и образ линейного оператора, ранг и дефект.

Тема 2: Матрица линейного оператора

Матрица линейного оператора и его координатная форма записи (связь между координатными столбцами x и $\varphi(x)$). Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису. Подобие матриц.

Тема 3: Алгебра линейных операторов и её изоморфизм полной матричной алгебре.

Действия над линейными операторами и их матрицами. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов. Линейные операторы с простым спектром. Условия диагонализируемости матрицы.

Тема 4: Кольцо K[x] многочленов от одного переменного.

Кольцо K[x] многочленов от одного переменного. Значение многочлена. Теорема Безу. Схема Горнера и деление многочлена на двучлен.

Теорема о делении многочленов с остатком. НОД многочленов и его свойства. Алгоритм Евклида и линейное разложение НОД.

Разложение многочленов в произведение неприводимых множителей. НОК многочленов.

Тема 5: Многочлены от нескольких переменных.

Кольцо многочленов K $[x_1, \dots, x_n]$ от нескольких переменных. Лексикографическое упорядочение многочленов. Симметрические многочлены: формулы Виета, основная теорема о симметрических многочленах и следствия из неё.

Тема 6: Многочлены над Q, R, C.

Целые и рациональные корни многочленов. Критерий Эйзенштейна неприводимости многочлена с целыми коэффициентами. Простое алгебраическое расширение поля. Конечные алгебраические расширения. Освобождение от алгебраической иррациональности в знаменателе дроби.

Алгебраическая замкнутость поля **C**. Уравнения 3-й и 4-й степеней над **C**. Разложение многочлена над **R**.

4.2.1. Темы практических занятий

1 семестр

Практическая работа 1. Бинарные алгебраические операции, их свойства. Аддитивная и мультипликативная формы записи бинарной операции. Группоид. Полугруппа. Моноид. Группа. Примеры. Простейшие свойства полугрупп, групп.

Практическая работа 2. Группа подстановок. Гомоморфизм и изоморфизм групп. Понятие кольца. Примеры колец.

Практическая работа 3. Понятие поля. Примеры полей. Простейшие свойства колец, полей. Гомоморфизм и изоморфизм колец, полей.

Практическая работа 4. Натуральные числа. Метод математической индукции Поле комплексных чисел. Алгебраическая форма записи комплексного числа.

Практическая работа 5. Геометрическое представление комплексных чисел и операций над ними Тригонометрическая форма записи комплексного числа.

Практическая работа 6. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме записи.

Практическая работа 7. Корни из комплексных чисел и двучленные уравнения.

Практическая работа 8. Контрольная работа.

Практическая работа 9. Линейная зависимость и независимость систем векторов, свойства.

2 семестр

Практическая работа 1. Эквивалентные системы векторов. Элементарные преобразования. Базис и ранг конечной системы векторов. Базис и размерность векторного пространства.

Практическая работа 2. Определители второго и третьего порядка. Формулы Крамера. Определители n-го порядка, их свойства. Миноры и алгебраические дополнения, разложение определителя по строке (столбцу), вычисление определителей.

Практическая работа 3. Первоначальные сведения о системах линейных уравнений (с.л.у.) Элементарные преобразования и равносильность систем линейных уравнений. Ранг матрицы. Равенство строчечного и столбцового рангов матрицы. Критерий совместности и определенности с.л.у.

Практическая работа 4. Метод Гаусса.

Практическая работа 5. Пространство решений однородной с.л.у. Фундаментальная система решений. Связь решений неоднородной и соответствующей однородной с.л.у.

Линейное многообразие решений с.л.у.

Практическая работа 6. Практическая работа 7. Алгебраические операции над матрицами и их свойства. Векторное пространство матриц одинаковой размерности mxn. Кольцо квадратных матриц n-го порядка

Практическая работа 7. Обратимые матрицы, свойства. Неособенная матрица. Элементарные матрицы. Критерий обратимости. Нахождение обратной матрицы с помощью присоединения единичной матрицы.

Практическая работа 8. Нахождение обратной матрицы с помощью с помощью присоединенной матрицы. Матричные уравнения

3 семестр

Практическая работа 1. Линейные отображения векторных пространств. Ядро и образ линейного оператора.

Практическая работа 2. Матрица линейного оператора и его координатная форма записи (связь между координатными столбцами x и $\varphi(x)$). Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису. Подобие матриц.

Практическая работа 3. Действия над линейными операторами и их матрицами. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов. Линейные операторы с простым спектром.

Практическая работа 4. Кольцо K[x] многочленов от одного переменного. Значение многочлена. Теорема Безу. Схема Горнера и деление многочлена на двучлен.

Практическая работа 5. Теорема о делении многочленов с остатком. НОД многочленов и его свойства. Алгоритм Евклида и линейное разложение НОД.

Практическая работа 6. Разложение многочленов в произведение неприводимых множителей. НОК многочленов.

Практическая работа 7. Кольцо многочленов $K[x_1, \ldots, x_n]$ от нескольких переменных. Лексикографическое упорядочение многочленов. Симметрические многочлены: формулы Виета, основная теорема о симметрических многочленах и следствия из неё.

Практическая работа 8. Целые и рациональные корни многочленов. Критерий Эйзенштейна неприводимости многочлена с целыми коэффициентами. Простое алгебраическое расширение поля. Конечные алгебраические расширения. Освобождение от алгебраической иррациональности в знаменателе дроби.

Практическая работа 9. Алгебраическая замкнутость поля **C**. Уравнения 3-й и 4-й степеней над C. Разложение многочлена над **R**.

4.2.3. Образцы средств для проведения текущего контроля

Вопросы к коллоквиуму

1 семестр

Вопросы к коллоквиуму 1. *«Группа, кольцо, поле»*

1. Бинарные алгебраические операции, их свойства. Примеры.
2. Группоид, полугруппа, моноид. Их свойства и примеры.
3. Группа, простейшие свойства, примеры.
4. Группы симметрий и подстановок. Примеры. Гомоморфизм и изоморфизм групп.
5. Кольцо простейшие свойства, примеры.
6. Поле, простейшие свойства, примеры. Гомоморфизм и изоморфизм колец и полей.
7. Какое место тема занимает в школьном курсе математики? Приведите примеры.

2 семестр

Вопросы к коллоквиуму 1. *«Векторные пространства. Системы линейных уравнений»*

1. Линейная оболочка системы векторов. Примеры
2. Эквивалентные системы векторов, их свойства. Элементарные преобразования.
3. Базис конечной системы векторов. Ранг конечной системы векторов.\
4. Базис и размерность векторного пространства. Координаты вектора относительно заданного базиса. Примеры
5. Первоначальные сведения о системах линейных уравнений. Элементарные преобразования и равносильность систем линейных уравнений. Метод Гаусса.
6. Ступенчатые матрицы и вычисление ранга матрицы. Критерий совместности системы линейных уравнений. Примеры.
7. Свойства решений однородной и неоднородной систем линейных уравнений, связь между решениями этих систем.
8. Пространство решений однородной системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений. Примеры.
9. Какое место тема занимает в школьном курсе математики? Приведите примеры.

Проверочные работы

1 семестр

Проверочная работа 1. *«Группа, кольцо, поле»*

Вариант 1

1. Определена ли на множествах *N, Z, Q, 2Z, 2·Z+1* следующая операция $a * b = \dfrac{a-b}{2}$?

В тех случаях, когда операция определена, будет ли она коммутативной, ассоциативной?

2. Является ли группой множество целых степеней числа 2 относительно умножения?

3. Является ли кольцом (полем) относительно сложения и умножения множество

$$K = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in Z\}?$$

4. Докажите, что любая группа, состоящая из трёх элементов абелева.

Проверочная работа 2. *«Метод математической индукции»*

1. Доказать методом математической индукции равенство: $1^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2$.

2. Доказать методом математической индукции неравенство: $3^m \geq 3 \cdot m - 6 \cdot$

3. Разложить по биному Ньютона: $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}\,)^5$

Проверочная работа 3. *«Действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме записи»*

Вариант 1

1. Решить квадратное уравнение: $x^2 - (4 + 3i) \cdot x + (1+5i) = 0$.

2. Вычислить в алгебраической форме записи: $\dfrac{(3+3i)^5}{(1+i)^3} + \dfrac{3-i}{1+i}$.

3. Вычислить в тригонометрической форме записи: а) $\dfrac{\left(\sqrt{3}-i\right)^{36}}{(1-i)^{24}}$; б) $\sqrt[8]{\dfrac{1-\sqrt{3}}{1-i}}$.

4. Какое множество точек комплексной плоскости задаётся условием: $|\, z + i \,| = |\, z - i \,|$?

Проверочная работа 4. *«Векторное пространство, подпространство, линейная оболочка» (тест)*

1. Какое из следующих множеств векторов плоскости, выходящих из начала координат образует векторное пространство?

а) Все векторы, концы которых лежат на прямой $y = x+1$;

б) Все векторы, концы которых образуют с данным ненулевым вектором a угол φ, $0 \leq \varphi \leq \pi$;

в) Все векторы, концы которых лежат на биссектрисе II и IV координатных углов.

г) Все векторы, концы которых лежат на прямых $y = x$ и $y = -x$.

2. Какое из утверждений верное?

а) Множество рациональных чисел является подпространством в векторном пространстве комплексных чисел над полем рациональных чисел;

б) $\mathbf{R}^2$ является подпространством в $\mathbf{R}^3$;

в) $\{L = (1, \beta) \mid \beta \in R\}$ - подпространство в $\boldsymbol{R}^2$;

г) $\{L = (\alpha, \beta, 4) \mid \alpha, \beta \in R\}$ - подпространство в $\boldsymbol{R}^3$.

3. Какой из данных векторов является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a} = (0, 1, 0)$ и $\boldsymbol{b} = (1, 0, 0)$: **а)** (2, 2, 1); **б)** $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, 0\right)$; **в)** (1, -1, 1); *г)* (2, 2, 2).

4. Какое из множеств в $\boldsymbol{R}^3$ является линейной оболочкой векторов $\boldsymbol{a}$ = (1, 0, 0) и $\boldsymbol{b}$ = (0, 2, 0) ? **а)** $A = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in R\}$; **б)** $B = \{(\alpha, 2, 0) \mid \alpha \in R\}$; **в)** $C = \{(\alpha, 2, 0) \mid \alpha \in R\}$;
г) $D = \{(1, 2, 0) \mid \alpha \in R\}$.

5. Какое из множеств является подмножеством линейной оболочки векторов $\boldsymbol{a}$ = (1, 0) и $\boldsymbol{b}$ = (2, 0)? **а)** $A = \{(0,0), (\sqrt{2}, 0)\}$; **б)** $B = \{(0, \alpha), \alpha \in Z\}$; **в)** $C = \{(1,2)\}$.

6. Какая из систем в R^3 является линейно независимой?

1. a = (0, 0, 3), b = (0, 2, 3), c = (1, 0, 3);

2. a = (1, 0, 0), b = (0, 1, 0), c = (0, 0, 0);

3. a = (1, 2, 3), b = (1, 0, 0), c = (2, 2, 3);

4. a = (1, 2, 1), b = (0, 2, 3), c = (2, 4, 2).

Проверочная работа 5. *«Линейная зависимость, базис и ранг конечной системы векторов. Базис векторного пространства»*

Вариант 1

1. Пользуясь элементарными преобразованиями установить линейную зависимость или независимость системы векторов. Найти один из базисов, вычислить ранг, выразить небазисные векторы через выбранный базис: $a_1 = (1, 2, 1)$; $a_2 = (3, 0, -1)$; $a_3 = (5, -2, -3)$.
2. Дополнить до базиса систему векторов (a_1, a_2), заданную в пространстве R^4.
   $a_1 = (1, 3, 5, 4)$; $a_2 = (2, 4, 1, 2)$.
3. Проверить образует ли система векторов (1) (a_1, a_2, a_3) базис в R^3 и найти координаты вектора x в этом базисе *(1)* $a_1 = (1, 1, 1)$; $a_2 = (1, 1, 2)$; $a_3 = (1, 2, 3)$; $x = (6, 9, 14)$.

Проверочная работа 6. «*Евклидовы пространства*»

1. Станет ли арифметическое пространство R^2 евклидовым, если скалярное произведение ввести по формуле: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = |x_1|\cdot|y_1| + |x_2|\cdot|y_2|$, где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$; $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$?
2. Показать, что векторы $\boldsymbol{e_1} = (-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ и $\boldsymbol{e_2} = (\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$ образуют ортонормированный базис в двухмерном евклидовом пространстве и найти координаты вектора $\boldsymbol{a} = (3,4)$ в этом базисе.
3. Базис $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_4}, \boldsymbol{e_5})$ – ортонормированный $\boldsymbol{x} = 2\cdot\boldsymbol{e_1}+3\cdot\boldsymbol{e_2}-3\cdot\boldsymbol{e_3}$, $y = \boldsymbol{e_5} - 2\cdot\boldsymbol{e_3}$. Найти: (x, y), $\|x\|$, $\|y\|$.
4. Найти нормированный вектор, ортогональный векторам: $\boldsymbol{a_1} = (1,1,1)$, $\boldsymbol{a_2} = (1,-1,1)$, $\boldsymbol{a_3} = (2,1,1)$.
5. Найти ортонормированный базис линейной оболочки векторов $\boldsymbol{a_1} = (2,1,3,-1)$, $\boldsymbol{a_2} = (7,4,3,-3)$, $\boldsymbol{a_3} = (1,1,-6,0)$, $\boldsymbol{a_4} = (5,7,7,8)$.
6. $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ – ортонормированный базис, $\boldsymbol{x} = 5\cdot\boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_3}$.. Найти угол между векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.
7. $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_4})$ – ортогональный базис, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2} - 4\cdot\boldsymbol{e_4}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e_1}+2\cdot\boldsymbol{e_3} + \boldsymbol{e_4}$., $\| e_1 \| =2$; $\| e_2 \| = 3$; $\| e_3 \| = 1$; $\| e_4 \| = 1$. Найти угол между векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

2 семестр

Проверочная работа 1. «*Матрицы и определители*»

Вариант 1

I уровень

Заполнить пропуски:

1.1. Произведение матриц $A_{3\times2}$ и $B_{2\times4}$ равно матрице C размерности …, её элемент c_{23} находится по правилу … .

1.2. Множество матриц … образует векторное пространство над …

1.3. Произведение $a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}\cdot a_{44}$ входит в определитель … порядка со знаком …

1.4. Разложение определителя $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ по второму столбцу имеет вид …

Определить истинно или ложно утверждение:

1.5. Матрица, определитель которой равен 2, обратима.

1.6. Определитель не изменится, если одну из строк умножить на ненулевое число и прибавить к ней другую строку.

1.7. Алгебраическое дополнение элемента a_{21} единичной матрицы $E_{3\times3}$ равно: 1) *0*; 2) *1*; 3) *–1*. Указать номер правильного ответа.

II уровень

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\ 4 & 2 & 1 & 0\\ 5 & 2 & 3 & 4\\ 6 & 2 & 4 & 4\end{pmatrix}$$

2.1. Решить матричное уравнение $A\cdot X=B$

2.2. Вычислить определитель матрицы С.

2.3. Решить систему линейных уравнений (1) с помощью правила Крамера.

$$(1)\ \begin{cases}x_1+x_2-3x_3=1\\ -x_2+3x_3=3\\ x_1+x_2-4x_3=1\end{cases}\qquad (2)\ \begin{vmatrix}1 & x & x^2 & x^3\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

III уровень

3.1. Решить уравнение (2).

Проверочная работа 2. “*Векторные пространства”*

Вариант 1

1. Проверьте образует ли векторное пространство следующая алгебра: **а)** множество всех геометрических векторов плоскости, выходящих из точки *O*, лежащих на осях координат с обычными операциями сложения и умножения на действительные числа. **b)** Образует ли подпространство в $\boldsymbol{R}^3$ множество: $A=\{(2,b,c)\mid b,c\in R\}$?
2. Какое из данных множеств является подмножеством линейной оболочки векторов $\boldsymbol{a}=(1,2)$ и $\boldsymbol{b}=(3,6)$: ***a)*** $A=\{(1,2),(2,6)\}$; ***b)*** $B=\{(x,y)\mid x,y\in Z$ и $y=2x\}$; ***c)*** $C=\{(x,y)\mid x,y\in Q$ и $x=2y\}$?
3. Пользуясь элементарными преобразованиями установить линейную зависимость или независимость системы векторов. Найти один из базисов, вычислить ранг, выразить небазисные векторы через выбранный базис: $\boldsymbol{a_1}=(1,3,2)$; $\boldsymbol{a_2}=(1,2,0)$; $\boldsymbol{a_3}=(1,1,-2)$.
4. Дополнить до базиса систему векторов $(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2})$, заданную в пространстве $\boldsymbol{R}^4$.
$$\boldsymbol{a_1}=(-1,2,4,3);\quad \boldsymbol{a_2}=(3,2,4,5).$$
5. Проверить образует ли система векторов *(1)* $(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_3})$ базис в $\boldsymbol{R}^3$ и найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в этом базисе *(1)*. $\boldsymbol{a_1}=(1,2,1)$; $\boldsymbol{a_2}=(2,1,0)$; $\boldsymbol{a_3}=(1,1,-2)$; $\boldsymbol{x}=(6,5,-1)$.

Проверочная работа 3. *«Системы линейных уравнений»*

Вариант 1

1. Исследуйте систему на совместность и определите количество решений системы (1):
$$(1)\ \begin{cases}x_1+x_2+x_3=6\\ 2x_1-3x_2+x_3=1\\ 3x_1-2x_2+2x_3=7\end{cases}$$
Найти базис направляющего подпространства и вектор сдвига линейного многообразия решений системы линейных уравнений.

2. Как изменится число решений системы (1), если к ней добавить уравнение

$$5 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 8\ ?$$

3. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ tx_1 + x_2 - tx_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$?

Проверочная работа 4. *«Обратная матрица, матричные уравнения»*

Вариант 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Вычислите A^{-1} и сделать проверку.

2. Решите матричное уравнение $A \cdot X = B$.

3. Найдите обратную матрицу. При каких ограничениях на параметры матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ обратима**.**

Проверочная работа 5. *«Векторные пространства. Системы линейных уравнений. Матрицы и определители»*

Вариант 1

1. Вычислите ранг системы векторов и определите является ли система линейно зависимой: $\mathbf{a_1}$ = (–1, 2, 1, –1, 7), $\mathbf{a_2}$ = (2, 4, 3, 0, 6), $\mathbf{a_3}$ = (3, 6, 3, –3, 21), $\mathbf{a_4}$ = (4, 8, 6, 0, 12).

2. Решите систему $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$ **а)** методом Гаусса; **б)** по формулам Крамера; **в)** матричным методом.

3. Вычислите произведение матриц: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Найдите A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3 семестр

Проверочная работа 1. *«Линейные операторы»*

Вариант 1

1. Будет ли отображение $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 0, x_1 - x_3)$ линейным оператором векторного пространства $\boldsymbol{R^3}$. Определите его матрицу, дефект, ранг, постройте базисы ядра и образа.

2. Линейное отображение φ векторного пространства $\boldsymbol{R^3}$ имеет в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ матрицу $A_1^{\phi} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Какова матрица φ в базисе $\{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3}\}$, если $\boldsymbol{f_1} = \boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{f_2} = \boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{f_3} = \boldsymbol{e_1} + 2\cdot\boldsymbol{e_3}$?

3. Укажите какой-либо базис ядра и базис образа линейного оператора пространства $\boldsymbol{R^3}$:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 - x_2, x_3)$$

4. В пространстве $\boldsymbol{R^3}$ найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора θ, заданного матрицей $A_1^{\theta} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Проверочная работа 2. *"Многочлены от одной переменной"*

1. Найдите степень многочлена $f(x) = (-x+1)\cdot(x^2+1) + (x^2-1)\cdot(x+1) - 2x + 1$.
2. Найти частное и остаток от деления f(x) = 2x5–3x3+1 на g(x) = –x3+3x2–x+5.
3. Разложите многочлен $f(x) = 2x^5-3x^3+1$ по степеням двучлена $x + 2$.
4. Вычислите значение многочлена $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x + 5$ в точке $\alpha = -2$.
5. Разделите многочлен $2x^5 - 3x^3 + 1$ с остатком на $x + 3$.
6. Разложите многочлен $f(x) = 2x^5 - 3x^3+1$ по степеням двучлена $x + 2$.
7. Найдите *НОД* и *НОК* многочленов $f(x) = 2x^3-3x+2$, $g(x) = -3x^2+2x-1$.

Проверочная работа 3. *"Многочлены от нескольких переменных",*
"Многочлены над полями Q, R, C"

1. Выразите многочлен $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1^2\cdot x_2^2 - x_1^2\cdot x_3^2 - x_2^2\cdot x_3^2$ через основные симметрические многочлены.
2. Найдите многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющий простой корень $-i$ и двукратный корень 2.
3. Решите уравнение $x^3 - 3\cdot x^2 + 9\cdot x - 7 + 6\cdot i = 0$.
4. Найдите все рациональные корни уравнения $x^4 - x^2 + x - 10 = 0$.
5. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби: $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{3\sqrt[3]{25} + 3\sqrt[3]{5} + 1}$.

5. Учебно-методическое обеспечение и планирование самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студентов предполагает изучение теоретического материала по актуальным вопросам дисциплины. Рекомендуется самостоятельное изучение доступной учебной и научной литературы, периодических, научно-практических, аналитических и экспертных изданий. Степень овладения знаниями и практическими навыками определяется в процессе текущего и итогового контроля.

Таблица 3

№ раздела	Тема	Виды СРС
1 семестр		
1.	Бинарные алгебраические операции, их свойства. Группоид. Полугруппа. Моноид. Группа. Примеры.	Выполнение домашних заданий.

№ раздела	Тема	Виды СРС
	Простейшие свойства полугрупп, групп.	
2.	Группа подстановок. Гомоморфизм и изоморфизм групп. Понятие кольца. Примеры колец.	Выполнение самостоятельной работы 1. Выполнение домашних заданий.
3.	Понятие поля. Примеры полей. Простейшие свойства колец, полей. Гомоморфизм и изоморфизм колец, полей.	Выполнение домашних заданий. Выполнение самостоятельной работы 2. Подготовка к коллоквиуму.
4.	Натуральные числа. Метод математической индукции Поле комплексных чисел. Алгебраическая форма записи комплексного числа.	Выполнение домашних заданий.
5.	Геометрическое представление комплексных чисел и операций над ними Тригонометрическая форма записи комплексного числа.	Выполнение самостоятельной работы 3. Выполнение домашних заданий. Подготовка к коллоквиуму.
6.	Действия над комплексными числами в тригонометрической форме записи. Корни из комплексных чисел и двучленные уравнения	Выполнение самостоятельной работы 4. Выполнение домашних заданий.
7.	Определение и простейшие свойства векторных пространств. Примеры. Подпространство. Критерий подпространства. Линейная оболочка системы векторов.	Выполнение самостоятельной работы 5. Выполнение домашних заданий. Подготовка к коллоквиуму.
8.	Линейная зависимость и независимость систем векторов, свойства.	Выполнение домашних заданий. Подготовка к коллоквиуму.
	2 семестр	
1.	Эквивалентные системы векторов. Элементарные преобразования. Базис и ранг конечной системы векторов. Базис и размерность векторного пространства	Выполнение домашних заданий.
2.	Определители второго и третьего порядка. Формулы Крамера. Определители n-го порядка, их свойства. Миноры и алгебраические дополнения, разложение определителя по строке (столбцу), вычисление определителей.	Выполнение самостоятельной работы 1. Выполнение домашних заданий.
3.	Первоначальные сведения о системах линейных уравнений (с.л.у.) Элементарные преобразования и равносильность систем линейных уравнений. Ранг матрицы. Равенство строчечного и столбцового рангов матрицы. Критерий совместности и определенности с.л.у	Выполнение домашних заданий. Выполнение самостоятельной работы 2. Подготовка к коллоквиуму.
4.	Метод Гаусса. Пространство решений однородной с.л.у. Фундаментальная система решений.	Выполнение домашних заданий.
5.	Связь решений неоднородной и соответствующей однородной с.л.у. Линейное многообразие решений с.л.у.	Выполнение самостоятельной работы 3. Выполнение домашних заданий.
6.	Алгебраические операции над матрицами и их свойства. Векторное пространство матриц одинаковой размерности mxn. Кольцо квадратных матриц n-го порядка.	Выполнение самостоятельной работы 4. Выполнение домашних заданий.
7.	Обратимые матрицы, свойства. Неособенная матрица. Элементарные матрицы.	Выполнение самостоятельной работы 5. Выполнение домашних заданий.
8.	Критерий обратимости. Нахождение обратной матрицы с помощью присоединения единичной матрицы.	Выполнение домашних заданий.

№ раздела	Тема	Виды СРС
9.	Вычисление обратной матрицы с помощью присоединенной. Матричные уравнения.	Выполнение домашних заданий. Подготовка к коллоквиуму.
	3 семестр	
1.	Линейные отображения векторных пространств. Примеры. Ядро и образ линейного оператора.	Выполнение домашних заданий.
2.	Матрица линейного оператора и его координатная форма записи (связь между координатными столбцами x и φ(x)). Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису. Подобие матриц.	Выполнение самостоятельной работы 1. Выполнение домашних заданий.
3.	Собственные векторы и собственные значения линейных операторов. Линейные операторы с простым спектром.	Выполнение домашних заданий. Подготовка к коллоквиуму.
4.	Кольцо K[x] многочленов от одного переменного. Значение многочлена. Теорема Безу. Схема Горнера и деление многочлена на двучлен.	Выполнение домашних заданий.
5.	Теорема о делении многочленов с остатком. НОД многочленов и его свойства. Алгоритм Евклида и линейное разложение НОД.	Выполнение самостоятельной работы 2. Выполнение домашних заданий.
6.	Разложение многочленов в произведение неприводимых множителей. НОК многочленов.	Выполнение домашних заданий.
7.	Кольцо многочленов K[x1 , …, xn] от нескольких переменных. Лексикографическое упорядочение многочленов. Симметрические многочлены: формулы Виета, основная теорема о симметрических многочленах и следствия из неё.	Выполнение самостоятельной работы 3. Выполнение домашних заданий.
8.	Целые и рациональные корни многочленов. Критерий Эйзенштейна неприводимости многочлена с целыми коэффициентами. Простое алгебраическое расширение поля. Конечные алгебраические расширения.	Выполнение домашних заданий.
9.	Освобождение от алгебраической иррациональности в знаменателе дроби. Алгебраическая замкнутость поля C. Уравнения 3-й и 4-й степеней над C. Разложение многочлена над R.	Выполнение домашних заданий. Подготовка к коллоквиуму.
10.	Контрольная работа	Подготовка контрольной работы.

6. Промежуточная аттестация по дисциплине (модулю)

6.1. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

Вопросы к экзамену (1 семестр)

1. Бинарные алгебраические операции, их свойства. Примеры.
2. Группоид, полугруппа, моноид. Их свойства и примеры.
3. Группа, простейшие свойства, примеры.
4. Группы симметрий и подстановок. Примеры. Гомоморфизм и изоморфизм групп.
5. Кольцо простейшие свойства, примеры.
6. Поле, простейшие свойства, примеры. Гомоморфизм и изоморфизм колец и полей.

7. Поле комплексных чисел.
8. Действия над комплексными числами в алгебраической форма записи.
9. Геометрическое представление комплексных чисел и операций над ними.
10. Представление комплексного числа в тригонометрической форме. Модуль и аргумент комплексного числа.
11. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме записи комплексного числа.
12. Определение и простейшие свойства векторных пространств. Примеры.
13. Подпространство. Критерий подпространства. Примеры.
14. Линейная оболочка системы векторов. Примеры.
15. Линейная зависимость и независимость системы векторов, свойства. Примеры.
16. Эквивалентные системы векторов. Элементарные преобразования конечной системы векторов. Примеры.
17. Базис конечной системы векторов. Ранг конечной системы векторов. Примеры.
18. Базис и размерность векторного пространства. Примеры.
19. Теорема единственности разложения по базису. Координаты вектора относительно заданного базиса. Примеры.

Задачи к экзамену (1 семестр)

1. Определены ли на множествах $\boldsymbol{N}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{2\cdot Z}, \boldsymbol{2\cdot Z+1}$ следующие операции:

$$a)\ < a, b > \to a - b; \quad b)\ < a, b > \to \frac{a+b}{2}.$$

2. Какими свойствами обладают бинарные алгебраические операции на множестве R?

$$a)\ < a, b > \to a - b; \quad b)\ < a, b > \to \frac{a+b}{2}$$

3. Решите уравнение $\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}$ в группе S_3.

4. Образует ли множество подстановок $\left\{ \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,3\,4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,3\,4 \end{pmatrix} \right\}$ подгруппу в группе S_4 ?

5. Является ли данное отображение f гомоморфным ? f: $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(<a, b>) = a$.

6. Докажите, что следующие кольца изоморфны: $<Q,+,\cdot>$ и $<\left\{ \begin{pmatrix} a\,o \\ o\,o \end{pmatrix}, где\ \ a \in Q \right\},+,\cdot>$.

7. Решите уравнения (в поле комплексных чисел):
a) $x^2+3\cdot x+4\cdot i=0$; **b)** $x^2-5\cdot x+12\cdot i=0$; **c)** $x^2-(4+3\cdot i)\cdot x+1+5i = 0$

8. Решите систему уравнений: $\begin{cases} ix+(1+i)y=3-i, \\ (1-i)x-(6-i)y=4 \end{cases}$

9. Представьте в тригонометрической форме числа: $1, -1, i, -i, 1-i, -1-i, -1-\sqrt{3}\cdot i, \sqrt{3}-i$

10. Вычислите $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10}, \left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{20}$.

11. Вычислите $\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{3}+i}{-1+i}}$

12. Решите уравнение: $x^4+1+i\sqrt{3}=0$.

13. На комплексной плоскости изобразите все точки, изображающие числа $z \in \boldsymbol{C}$, со свойствами: ***a)*** $|z| \ge 1$; ***b)*** $arg\, z = \frac{\pi}{3}$; ***c)*** $|z + i| = 3$; ***d)*** $|z - i| < |z + 2 - 3i|$; ***e)*** $z^3 = -i$; ***k)*** $\begin{cases} |z - i| = 1 \\ arg\, z = \frac{\pi}{2} \end{cases}$.
14. На комплексной плоскости найдите все точки, изображающие значения $\sqrt[3]{1-i}$.
15. Вычислите ранг и проверьте линейную независимость системы векторов:
а) $\boldsymbol{a_1} = (1, 3, -1, 1, 2)$, $\boldsymbol{a_2} = (2, 6, -3, 0, 2)$, $\mathbf{a_3} = (3, 18, -3, 3, 6)$, $\boldsymbol{a_4} = (4, 12, -6, 0, 4)$;

Вопросы к экзамену (2 семестр)

1. Линейная оболочка системы векторов. Примеры
2. Эквивалентные системы векторов, их свойства. Элементарные преобразования.
3. Базис конечной системы векторов. Ранг конечной системы векторов.
4. Базис и размерность векторного пространства. Координаты вектора относительно заданного базиса. Примеры
5. Первоначальные сведения о системах линейных уравнений. Элементарные преобразования и равносильность систем линейных уравнений. Метод Гаусса.
6. Ступенчатые матрицы и вычисление ранга матрицы. Критерий совместности системы линейных уравнений. Примеры.
7. Свойства решений однородной и неоднородной систем линейных уравнений, связь между решениями этих систем.
8. Пространство решений однородной системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений. Примеры.
9. Подстановки, их чётность. Определители 2-го и 3-го порядка. Схема треугольников. Формулы Крамера.
10. Определитель n-го порядка, его свойства.
11. Минор. Алгебраическое дополнение. Разложение определителя по строке (по столбцу).
12. Операции над матрицами, их свойства. Векторное пространство матриц одинаковой размерности над полем F.
13. Кольцо квадратных матриц n-го порядка. Примеры.
14. Обратимые матрицы, их свойства. Критерий обратимости матрицы. Вычисление обратной матрицы с помощью приписывания единичной матрицы.
15. Вычисления обратной матрицы с помощью присоединенной. Матричные уравнения. Примеры.

Задачи к экзамену (2 семестр)

Тема 1: «Векторные пространства»

1. Является ли вектор $c = (3, 8, 11)$ линейной комбинацией векторов $a = (0, 1, 1)$ и $b = (1, 2, 3)$?
2. Записать общий вид элементов линейной оболочки, натянутой на систему векторов $\vec{a} = (1, 2)$ и $b = (2, 4)$ и дать ей геометрическое истолкование.
3. Выяснить линейно-зависима или линейно-независима система векторов, найти её ранг:
a) $a_1 = (1,2,3,1)$; $a_2 = (2,3,1,2)$; $a_3 = (3,1,2,-2)$; $a_4 = (0,4,2,5)$.
b) $a_1 = (-1,3,3,2,5)$; $a_2 = (-3,5,2,3,4)$; $a_3 = (-3,1,-5,0,-7)$; $a_4 = (-5,7,1,4,1)$.
4. Проверить, образует ли каждая из следующих систем векторов базис пространства R^3 и найти координаты вектора x в каждом из этих базисов.
a) $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,1,2)$, $e_3 = (1,-2,3)$, $x = (6,9,14)$

b) $e_1 = (2,1,-3)$, $e_2 = (3, 2, -5)$, $e_3 = (1,-1,1)$, $x = (6, 2, -7)$

5. Дополнить до базиса систему векторов, заданных в пространстве R^4:

a) $a_1 = (2, 3, 4, 5)$; $a_2 = (4, 6, 1, 8)$;

b) $a_1 = (1, 3, 4, 5)$; $a_2 = (3, 8, 1, 2)$.

Тема 2: "Системы линейных уравнений"

6. Исследовать систему на совместность:

$$(1)\ \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 7x_1 + 10x_2 - 5x_3 = 2 \end{cases}$$

7. Исследуйте систему на совместность и определите количество решений системы (2):

$$(2)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

8. Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$a)\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}; \quad b)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

9. Найти базис (фундаментальную систему решений) и размерность линейного пространства решений системы линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Тема 3: «Определители»

10. Вычислить количество инверсий в перестановке (3, 4, 2, 1,5). Будет ли она чётной?

11. Какие значения должны принимать i и k, чтобы произведение $a_{17}\ a_{23}\ a_{31}\ a_{4i}\ a_{54}\ a_{66}\ a_{7k}\ a_{82}\ a_{99}$ входило в определитель девятого порядка *a)* со знаком "плюс", *b)* со знаком "минус"?

12. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}$; *в)* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

13. Решить систему с помощью правила Крамера:

$$а)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}; \quad б)\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4 \\ x_2 + 9x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

Тема 4: «Операции над матрицами»

14. Вычислить произведение матриц: а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

15. Вычислить матрицу обратную данной: а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

16. Решить систему в матричным способом: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$.

Вопросы к экзамену (3 семестр)

1. Линейные операторы: определение, примеры и свойства.
2. Ядро и образ линейного оператора, дефект и ранг.
3. Теорема о сумме ранга и дефекта. Матрица линейного оператора.
4. Связь между координатными столбцами x и $\varphi(x)$. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису. Подобие матриц.
5. Действия над линейными операторами и их матрицами.
6. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов
7. Кольцо многочленов от одного переменного.
8. Теорема о делении многочленов с остатком.
9. Значения многочлена в точке. Теорема Безу. Корни многочлена.
10. Формулы Виета и их применение.
11. Схема Горнера: вычисление значений многочлена, деление на двучлен, разложение по степеням двучлена.
12. *НОД* многочленов, его свойства и алгоритм Евклида.
13. Линейное разложение НОД. *НОК* многочленов и его свойства.
14. Целые и рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами.
15. Кольцо многочленов от нескольких переменных.
16. Симметрические многочлены: определение, свойства, примеры.
17. Лексикографическое упорядочение членов многочленов. Определение, свойства, примеры.
18. Основная теорема о симметрических многочленах: представление в виде многочлена от симметричных многочленов.

Задачи к экзамену (3 семестр)

1. Будет ли отображение $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3,\ -3 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3,\ x_2 - x_3)$ линейным оператором векторного пространства $\boldsymbol{R}^3$? . Определите его матрицу, дефект, ранг, постройте базисы ядра и образа.

2. Линейное отображение φ векторного пространства $\boldsymbol{R}^3$ имеет в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ матрицу $A_l^{\phi} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу отображения φ в базисе $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$, если $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{f}_3 = 2 \cdot \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 3 \cdot \boldsymbol{e}_3$.

3. Укажите какой-либо базис ядра и базис образа линейного оператора пространства $\boldsymbol{R}^3$: $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1, 0)$.

4. Найдите степень многочлена $f(x) = (-x+1)\cdot(x^2+1) + (x^2-1)\cdot(x+1) - 2x + 1$.
5. Найдите частное и остаток от деления $f(x) = 2x^5-3x^3+1$ на $g(x) = -x^3+3x^2-x+5$.
6. Разложите многочлен $f(x) = 2x^5-3x^3+1$ по степеням двучлена $x + 2$.
7. Вычислите значение многочлена $f(x) = -x^3+ 3x^2 - x + 5$ в точке $\alpha = -2$.
8. Разделите многочлен $2x^5-3x^3+1$ с остатком на $x + 3$.
9. Разложите многочлен $f(x) = 2x^5-3x^3+1$ по степеням двучлена $x + 2$.
10. Найдите *НОД* и *НОК* многочленов $f(x) = 2x^3-3x+2$, $g(x) = -3x^2+2x-1$.
11. Найдите линейное разложение *НОД* многочленов $2x^3-3x+2$, $-3x^2+2x-1$.
12. Найдите многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющий простой корень $-i$ и двукратный корень 2.
13. Найдите все рациональные корни многочлена $f(x) = x^3+x^2-5x+3$.
14. Найдите кратности корней многочлена $f(x) = x^3+x^2-5x+3$.
15. Упорядочьте многочлен лексикографически: $1 - x^4 + x\cdot y\cdot z - x^2\cdot y\cdot z^3 + 2\cdot x^2 - y^3\cdot z + 3\cdot z^4$.
16. Выразите симметрический многочлен через элементарные симметрические:
$$x^2\cdot y^2 + x^2\cdot z^2 + y^2\cdot z^2 .$$
17. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $1/(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - 1)$.
18. Найдите сумму кубов корней уравнения $2\cdot x^2 - x - 5 = 0$
19. Найдите многочлен с рациональными коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}$.

Контрольная работа по дисциплине «Алгебра» (3 семестр)

Контрольная работа в 3 семестре представляет собой комплексную работу:
1) Решение алгебраических задач.
2) Проведение методического анализа содержательной части школьного предмета «Алгебра и начала анализа» и подбор школьных заданий различного уровня сложности (базовый, повышенный, творческий) по одной из понятийных линий.

Выполнение и зачет по контрольной работе является допуском к экзамену.
По результатам оценки контрольной работы студенту ставится оценка «зачтено».

1 часть

1. Будет ли линейным оператором векторного пространства R^3 отображение $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, x_2+x_3, x_2 - x_3)$. Определить его матрицу, дефект, ранг, построить базисы ядра и образа.

2. Найти частное и остаток от деления многочлена $8\cdot x^3 - 3\cdot x^2 + 5\cdot x + 4$ на $x - 3$.

3. Пользуясь схемой Горнера, разложить многочлен $3\cdot x^4 + 8\cdot x^3 - 2\cdot x^2 + 6\cdot x - 5$ по степеням $x + 3$, найти значение многочлена и значения его производных при $x = -3$.

4. Для многочлена $x^4 - 5\cdot x^3 + 9\cdot x^2 - 7\cdot x + 2$ найти кратность корня $x = 1$.

5. Вычислить $НОД(2\cdot x^3 - 7\cdot x^2 - 5\cdot x + 29,\ \ 2\cdot x^2 - 11\cdot x + 16)$ и его линейное разложение.

6. Найти все рациональные корни уравнения $x^4 - x^2 + x - 10 = 0$.

7. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби: $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{3\sqrt[3]{25} + 3\sqrt[3]{5} + 1}$.

2 часть

1. Сделайте анализ школьных учебников по предмету «Алгебра и начала анализа»: не менее 5 авторских линеек, (например, линейки А.Г. Мордковича, Ю.Н. Макарычева, А.Г. Мерзляка, А.Н. Колмогорова и др.), рекомендованных для использования в школе, не старше 5 лет, по одной из категорий (тем) предметной области «Алгебра» (по вариантам).

2. Отчет структурируйте: авторы, класс, тип учебника (общеобразовательный или профильный), тема, основные понятия, уровень сложности материала, наличие примеров и задач различного уровня сложности с примерами, особенности.

3. Сделайте подбор примеров и задач по уровням сложности: не менее 20 примеров и не менее 10 задач на каждый уровень (базовый, повышенный, творческий). Подборку сделать для конкретного класса.

Вариант	Понятийная линия (тема) алгебры
1.	Бинарные алгебраические операции, их свойства
2.	Определение и простейшие свойства векторных пространств
3.	Базис и размерность векторного пространства. Координаты вектора относительно заданного базиса
4.	Первоначальные сведения о системах линейных уравнений. Элементарные преобразования и равносильность систем линейных уравнений. Метод Гаусса.
5.	Операции над матрицами, их свойства.
6.	Линейные операторы: определение, примеры и свойства
7.	Действия над линейными операторами и их матрицами
8.	Собственные векторы и собственные значения линейных операторов
9.	Кольцо многочленов от одного переменного
10.	Значения многочлена в точке. Теорема Безу. Корни многочлена
11.	Формулы Виета и их применение
12.	Схема Горнера: вычисление значений многочлена, деление на двучлен, разложение по степеням двучлена
13.	*НОД* многочленов, его свойства и алгоритм Евклида

6.2.Критерии оценивания компетенций:

Таблица 4

Карта критериев оценивания компетенций

Код и наименование компетенции	Компонент (знаниевый/функциональный)	Оценочные материалы	Критерии оценивания
ОК-3 способность использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве	Знает основные понятия и доказательства фактов основных разделов курса (алгебраические структуры, линейная алгебра, алгебра многочленов).	Контрольные вопросы Теоретические вопросы к экзамену	*Пороговый уровень:* может выполнять работы под контролем преподавателя. *Базовый уровень:* может выполнять работы самостоятельно. *Повышенный уровень:* готов выполнять работы в условиях учебно-воспитательного процесса с обучающимися.
	Умеет строить примеры групп, колец, полей, векторных пространств и связанных с ними объектов; выполнять действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме; устанавливать линейную зависимость или независимость систем векторов; находить базис и размерность векторных пространств и их подпространств, координаты векторов; решать типовые	Практические работы Проверочные работы Практический вопрос к экзамену (задача). Контрольная работа.	

Код и наименование компетенции	Компонент (знаниевый/функциональный)	Оценочные материалы	Критерии оценивания
	задачи.		
ПК-4 способность использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемого учебного предмета	Знает области приложения знаний по алгебре в содержании школьного курса математики Может составить алгоритм решения задачи по алгебре для использования в учебном процессе и пояснить решение типовых школьных задач, подобрать задачи по теме с учетом сложности.	Контрольные вопросы Практические работы Контрольная работа	*Пороговый уровень:* может выполнять работы под контролем преподавателя. *Базовый уровень:* может выполнять работы самостоятельно. *Повышенный уровень:* готов выполнять работы в условиях учебно-воспитательного процесса с обучающимися.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

7.1 Основная литература:

1. Бортаковский, А. С. Линейная алгебра в примерах и задачах : учеб. пособие / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев. — 3-е изд., стереотип. — М. : ИНФРА-М, 2020. - 592 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - Текст : электронный. - URL: https://new.znanium.com/read?id=356020 – Режим доступа: по подписка ТюмГУ.
2. Рудык, Б. М. Линейная алгебра : учеб. пособие / Б.М. Рудык. - М. : ИНФРА-М, 2019. - 318 с. - (Высшее образование: Бакалавриат). – URL: https://znanium.com/read?id=354894 – Режим доступа: по подписка ТюмГУ.

7.2 Дополнительная литература:

1. Шевцов, Г. С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты: Учебное пособие / Г.С. Шевцов. - 3-е изд., испр. и доп. - М.: Магистр: НИЦ ИНФРА-М, 2019. - 544 с. - Текст : электронный. – URL: https://znanium.com/read?id=355793 Режим доступа: по подписка ТюмГУ.
2. Шеина, Г. В. Теория и практика решения задач по алгебре. Часть 1 : учеб. пособие / Г. В. Шеина. - Москва : МПГУ, 2014. - 100 с. - Текст : электронный. – URL: https://znanium.com/read?id=228897 Режим доступа: по подписка ТюмГУ

7.3 Интернет-ресурсы:

1. Единое окно доступа к информационным ресурсам. – URL: http://window.edu.ru Режим доступа: свободный.
2. Портал образования. – URL: https://portalobrazovaniya.ru Режим доступа: свободный.
3. Российское образование. Федеральный портал. – URL: http://www.edu.ru Режим доступа: свободный.
4. «Математическое образование» — общедоступная электронная библиотека по математике и вопросам ее преподавания. – URL: https://www.mathedu.ru/ Режим доступа: свободный.

7.4. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. Электронно-библиотечная система издательства «Лань» – URL: https://e.lanbook.com/ Режим доступа: по подписке ТюмГУ.
2. Электронно-библиотечная система Znanium.com – URL: https://znanium.com/ Режим доступа: по подписке ТюмГУ.
3. IPR BOOKS – URL: http://www.iprbookshop.ru/ Режим доступа: по подписке ТюмГУ.
4. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU – URL: https://www.elibrary.ru/defaultx.asp Режим доступа: по подписке ТюмГУ.
5. Межвузовская электронная библиотека (МЭБ) – URL: https://icdlib.nspu.ru/ Режим доступа: по подписке ТюмГУ.
6. Национальная электронная библиотека (НЭБ) – URL: https://rusneb.ru/ Режим доступа: по подписке ТюмГУ.
7. Ивис - – URL: https://dlib.eastview.com/ Режим доступа: по подписке ТюмГУ.·
8. Библиотека ТюмГУ - https://library.utmn.ru/

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

– Интернет-браузер для работы с интернет-ресурсами и информационными справочными системами;
– Microsoft Teams – интернет-приложение, платформа для электронного обучения.

Лицензионное ПО для разработки учебно-методических материалов:
– Microsoft Office 2003, Microsoft Office 2007, Microsoft Office 2010, Windows, Dr. Web, Autodesk AutoCAD 2018.

9. Технические средства и материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Мультимедийная учебная аудитория семинарского типа № 412 на 28 посадочных мест **для проведения лекционных и практических занятий** оснащена следующими техническими средствами обучения и оборудованием: учебная мебель, доска аудиторная, мультимедийное проекционное и акустическое оборудование, персональный компьютер
ПК (DELL VOSTRO 3900: Intel Core i5-4460 3,2 ГГц; DDR3 4 ГБ; SSD 128 ГБ; DELL E2214HB: 1920x1080; 21,5 дюйм; MS Windows 10; MS Office 2010), **проектор** (Epson EB-980W: 1280x800; 3800 лм), **экран** (16:9; 190x330 см)
На ПК установлено следующее программное обеспечение: Офисное ПО: операционная система MS Windows, офисный пакет MS Office, платформа MS Teams, офисный пакет LibreOffice, антивирусное ПО Dr. Web.
Обеспечено проводное подключение ПК к локальной сети и сети Интернет.

Мультимедийная учебная аудитория семинарского типа № 311 на 24 рабочих места с **компьютерным классом** на 15 рабочих мест **для проведения индивидуальных и групповых консультаций, для самостоятельной работы** оснащена следующими техническими средствами обучения и оборудованием:
15+1 ПК (Dell 3060-7601: Intel Core i5 8500T 2,1 ГГц; DDR4 8 ГБ; SSD 256 ГБ; Dell SE2216H: 1920x1080; 21,5 дюйма; MS Windows 10; MS Office 2010), **проектор** (Epson EB-980W: 1280x800; 3800 лм), **экран** (16:10)
На ПК установлено следующее программное обеспечение:

— Офисное ПО: операционная система MS Windows, офисный пакет MS Office, платформа MS Teams, офисный пакет LibreOffice, антивирусное ПО Dr. Web.

Обеспечено проводное подключение ПК к локальной сети и сети Интернет.