

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Тобольский педагогический институт им. Д.И.Менделеева (филиал)
Тюменского государственного университета

УТВЕРЖДАЮ

Директор

Шилов С.П.



ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки):
Профили: математика; информатика
Форма обучения очная

1. Паспорт оценочных материалов по дисциплине

1.1. Перечень компетенций

Код и наименование компетенции	Компонент (знаниевый/функциональный)
<p>ОК-3 способность использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве</p>	<p>Знает основные понятия и формулы теории чисел: основные теоретико-числовые понятия; основные результаты о делимости целых чисел и теории сравнений; основные алгоритмы решения стандартных задач</p> <p>Может использовать теоретические знания для решения математических и прикладных задач:</p> <ul style="list-style-type: none"> • применять теорему о делении с остатком и свойства делимости к решению различных арифметических задач; • применять алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя целых чисел, его линейного разложения и наименьшего общего кратного; • используя “решето” Эратосфена, составлять таблицы простых чисел и решать задачи на применение основной теоремы арифметики и свойств простых чисел. • находить разложение заданного рационального числа в конечную цепную дробь и разложение заданного иррационального числа в бесконечную цепную дробь, вычислять подходящие дроби и применять свойства подходящих дробей при решении задач; • применять определение и свойства сравнений по заданному модулю при составлении полной и приведённой систем вычетов; • вычислять значения функции Эйлера и остатки арифметических выражений от деления на заданное число, используя свойства сравнений и теоремы Эйлера и Ферма. • решать различными способами линейные сравнения первой степени с одним неизвестным. • применять для решения задач алгоритмы нахождения показателя и первообразного корня по заданному модулю. Уметь решать двучленные сравнения, используя таблицы индексов. • применять обобщённый признак делимости Паскаля для конструирования конкретных признаков делимости. • проверять правильность выполнения простейших арифметических действий с помощью сравнений по модулям 9 и 11. • определять по внешнему виду обыкновенной дроби вид её десятичного разложения (конечная десятичная дробь, чисто или смешанно периодическая), уметь находить длины периода и предпериода этого десятичного разложения; • находить аннулирующие уравнения для некоторых простых видов алгебраических чисел.
<p>ПК-4 способность использовать возможности образовательной среды для</p>	<p>Знает место изучения элементов дисциплины в курсе математики основной и старшей школы, их межпредметные связи</p>

Код и наименование компетенции	Компонент (знаниевый/функциональный)
достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемых учебных предметов	Может доступно объяснить решение задач в области теории чисел, показать область применения знаний

1.2. Паспорт оценочных средств по дисциплине

№ п/п	Темы дисциплины в ходе текущего контроля, вид промежуточной аттестации	Код компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства (количество вариантов, заданий и т.п.)
1	Теория делимости в кольце целых чисел	ОК-3, ПК-4	Контрольные вопросы 1-21. Практическая работа 1-3. Домашние задания 1-4.
2	Теория сравнений	ОК-3, ПК-4	Контрольные вопросы 22-41. Практическая работа 4-5. Домашние задания 5-7.
3	Арифметические приложения теории сравнений	ОК-3, ПК-4	Контрольные вопросы 42-47. Практическая работа 6-7.
4	Алгебраические и трансцендентные числа	ОК-3, ПК-4	Контрольные вопросы 48-51. Практическая работа 8. Домашние задания 8.
1-4	Зачет	ОК-3, ПК-4	Вопросы к экзамену (25 вопросов с примером).

1.3. Показатели, критерии и шкала оценивания сформированности компетенций

Код и наименование компетенции	Компонент (знаниевый/функциональный)	Оценочные материалы	Критерии оценивания
ОК-3 способность использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве	Знает основные понятия и формулы теории чисел: основные теоретико-числовые понятия; основные результаты о делимости целых чисел и теории сравнений; основные алгоритмы решения стандартных задач	Контрольные вопросы. Зачет.	<i>Пороговый уровень:</i> может выполнять работы под контролем преподавателя. <i>Базовый уровень:</i> может выполнять работы самостоятельно. <i>Повышенный уровень:</i> готов выполнять работы в условиях учебно-воспитательного процесса с обучающимися.
	Может использовать теоретические знания для решения математических и прикладных задач	Практические работы Домашние задания. Зачет.	
ПК-4 способность	Знает место изучения	Контрольные	<i>Пороговый уровень:</i>

Код и наименование компетенции	Компонент (знаниевый/функциональный)	Оценочные материалы	Критерии оценивания
использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемых учебных предметов	элементов дисциплины в курсе математики основной и старшей школы, их межпредметные связи	вопросы Зачет.	может выполнять работы под контролем преподавателя. <i>Базовый уровень:</i> может выполнять работы самостоятельно.
	Может доступно объяснить решение задач в области теории чисел, показать область применения знаний	Практические работы. Зачет.	<i>Повышенный уровень:</i> готов выполнять работы в условиях учебно-воспитательного процесса с обучающимися.

2. Виды и характеристика оценочных средств

Текущий контроль осуществляется проверкой наличия конспектов лекций и собеседования по контрольным вопросам, выполнения практических работ и домашних заданий в самостоятельной работе.

Итоговый контроль – зачет с оценкой проходит в форме собеседования собеседование по 2 вопросам: теоретический вопрос и решение примера по теме вопроса.

2.1. Контрольные вопросы

Контрольные вопросы используются для проведения анализа материала лекций, самостоятельного углубления знаний, а также для самопроверки знаний студентов по отдельным вопросам и/или темам дисциплины. Ответ оценивается в баллах «2», «1» или «0». Критерии оценки ответа (табл.) доводятся до сведения обучающихся в начале занятий. Оценка объявляется в конце занятия.

Балл	Критерий оценивания
2	<ul style="list-style-type: none"> - показывает знание основных понятий темы, грамотно пользуется терминологией; - проявляет умение анализировать и обобщать информацию, навыки связного описания явлений и процессов; - демонстрирует умение излагать учебный материал в определенной логической последовательности; - показывает умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами; - демонстрирует сформированность и устойчивость знаний, умений и навыков; - могут быть допущены одна–две неточности при освещении второстепенных вопросов.
1	<ul style="list-style-type: none"> - неполно или непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения материала; - имелись затруднения или допущены ошибки в определении понятий, использовании терминологии, описании явлений и процессов, исправленные после наводящих вопросов; - выявлена недостаточная сформированность знаний, умений и навыков, студент не может применить теорию в новой ситуации.
0	<ul style="list-style-type: none"> - не раскрыто основное содержание учебного материала; - обнаружено незнание или непонимание большей или наиболее важной части учебного материала; - допущены ошибки в определении понятий, при использовании терминологии, в

	описании явлений и процессов, решении задач, которые не исправлены после нескольких наводящих вопросов; - не сформированы компетенции, отсутствуют соответствующие знания, умения и навыки.
--	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

2.2. Практические работы

Задания на практических занятиях используются для оценки умений по отдельным темам дисциплины. Отчет оценивается в баллах «2», «1» или «0».

Учитывается активность студента при выполнении работы на занятии.

Критерии оценки доводятся до сведения обучающихся в начале занятий. Оценка объявляется непосредственно в конце занятия.

На отдельных практических занятиях проводятся проверочные работы, а также коллоквиум по контрольным вопросам.

Балл	Критерий оценивания
2	Задания выполнены правильно в полном объеме. Оформление соответствует всем требованиям. Решения задачи с пояснением у доски.
1	Задания выполнены правильно в полном объеме. Оформление в целом соответствует требованиям. Решения задачи с пояснением у доски отсутствует.
0	Задания выполнены частично правильно и не полностью. Оформление не соответствует требованиям. У доски не работает.

2.3. Домашние задания

Используются для оценки практических умений по решению задач, выявлению алгоритма задач и способности объяснить решение задачи, как основа для формирования профессиональных компетенций.

Отчет о выполнении заданий оценивается по 5-ти балльной системе. Критерии оценки ответа (табл.) доводятся до сведения обучающихся в начале занятий.

Балл	Критерий оценивания
"отлично"	Выполнил работу самостоятельно и без ошибок; допустил не более одного недочета; демонстрирует понимание способов и видов учебной деятельности по созданию алгоритма и программы; владеет терминологией и может прокомментировать этапы своей деятельности и полученный результат; может предложить другой способ деятельности или алгоритм выполнения задания.
"хорошо"	Выполнил работу самостоятельно и без ошибок; допустил не более двух (для простых задач) и трех (для сложных задач) недочетов; демонстрирует понимание способов и видов учебной деятельности по созданию алгоритма и программы; может прокомментировать этапы своей деятельности и полученный результат (например, дает комментарии о выполненных действиях при форматировании алгоритма или листинга программы; затрудняется предложить другой способ деятельности или алгоритм выполнения задания.
"удовлетворительно"	Если студент правильно выполнил более 50% всех заданий и при этом: демонстрирует общее понимание способов и видов учебной деятельности по созданию алгоритма и программы; может прокомментировать некоторые этапы своей деятельности и полученный результат. Или при условии выполнения всей работы студент допустил:

	для простых задач – одну грубую ошибку или более четырех недочетов; для сложных задач – две грубые ошибки или более восьми недочетов. Сложным считается задание, которое естественным образом разбивается на несколько частей при его выполнении.
"неудовлетворительно"	Допустил число ошибок и недочетов, превышающее норму, при которой может быть выставлена оценка «удовлетворительно»; правильно выполнил не более 10% всех заданий. Или не приступил к выполнению работы.

2.4. Зачет

Результаты освоения дисциплины на зачете с оценкой оцениваются степенью полноты ответа на теоретический вопрос и выполнения примера по теме вопроса.

Оценка «зачтено» (*результаты выше порогового уровня*: может выполнять работы самостоятельно, в том числе, готов выполнять работы в условиях учебно-воспитательного процесса с обучающимися):

- Знает основные понятия и формулы теории чисел: основные теоретико-числовые понятия; основные результаты о делимости целых чисел и теории сравнений; основные алгоритмы решения стандартных задач.
- Знает области приложения знаний в содержании школьного курса математики.
- Может применять методы теории чисел в практике работы учителя математики.
- Может доступно пояснить решение вычислительных задач.
- Отвечает на большинство дополнительных вопросов.

Оценка «не зачтено» (*результаты не достигли порогового уровня*: не может выполнять работы самостоятельно, нуждается в помощи преподавателя):

- Знает отдельные понятия и формулы теории чисел: основные теоретико-числовые понятия; основные результаты о делимости целых чисел и теории сравнений; основные алгоритмы решения стандартных задач.
- С трудом может назвать области приложения знаний в содержании школьного курса математики
- Слабо знает классические методы теории чисел, используемые в прикладных задачах
- С трудом может применять методы теории функций в практике работы учителя математики.
- Затрудняется отвечать на дополнительные вопросы.

Зачет принимается преподавателем, проводившим занятия, или читающим лекции по данной дисциплине. В случае отсутствия ведущего преподавателя зачет принимается преподавателем, назначенным распоряжением заведующего кафедрой. С разрешения заведующего кафедрой на зачете может присутствовать преподаватель кафедры, привлеченный для помощи в приеме зачета.

Во время зачета обучающиеся могут пользоваться с разрешения ведущего преподавателя соответствующими техническими и программными средствами.

Время для подготовки 30-40 мин – для формулировки ответа на теоретический вопрос и решение примера. Время ответа - не более 5-10 минут. Преподавателю предоставляется право задавать обучающимся дополнительные вопросы в рамках программы дисциплины. Общее время сдачи зачета на 1 студента – 15 минут.

Нарушение дисциплины, списывание, использование обучающимися неразрешенных печатных и рукописных материалов, мобильных телефонов, коммуникаторов, планшетных компьютеров, ноутбуков и других видов личной

коммуникационной и компьютерной техники во время зачета запрещено. В случае нарушения этого требования преподаватель обязан удалить обучающегося из аудитории и проставить ему в ведомости оценку «не зачтено».

Количественная оценка «отлично», «хорошо» или «удовлетворительно», внесенная в зачетную книжку и зачетно-экзаменационную ведомость, является результатом успешного усвоения учебного материала. Результат экзамена в зачетную книжку выставляется в день проведения в присутствии самого обучающегося. Преподаватели несут персональную ответственность за своевременность и точность внесения записей о результатах промежуточной аттестации в зачетно-экзаменационную ведомость и в зачетные книжки.

Если обучающийся явился на экзамен и отказался от прохождения аттестации в связи с неподготовленностью, то в зачетно-экзаменационную ведомость ему выставляется оценка в соответствии с набранными баллами в течение семестра.

Неявка на экзамен при условии нулевой аттестации в течение семестра отмечается в зачетно-экзаменационной ведомости словами «не явился».

Обучающимся, не сдавшим экзамен в установленные сроки по уважительной причине, индивидуальные сроки проведения экзамена определяются приказом ректора Университета. Обучающиеся, имеющие академическую задолженность, сдают экзамен в сроки, определяемые Университетом. Информация о ликвидации задолженности отмечается в экзаменационном листе. Допускается с разрешения деканата и досрочная сдача экзамена с записью результатов в экзаменационный лист.

Инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья могут сдавать экзамены в сроки, установленные индивидуальным учебным планом. Инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья, имеющие нарушения опорно-двигательного аппарата, допускаются на аттестационные испытания в сопровождении ассистентов-сопровождающих.

3. Оценочные средства

3.1. Контрольные вопросы

1. Теорема о делении с остатком. Делимость нацело и её свойства.
2. Наибольший общий делитель.
3. Алгоритм Евклида.
4. Линейное разложение *НОД*.
5. Наименьшее общее кратное.
6. Взаимно простые числа и их свойства.
7. Простые числа и их свойства.
8. Основная теорема арифметики.
9. Описание делителей натурального числа.
10. Количество $\tau(n)$ и сумма $\sigma(n)$ делителей натурального числа.
11. Нахождение *НОД* и *НОК* с помощью канонических разложений.
12. Бесконечность количества простых чисел в арифметических прогрессиях.*
13. Решето Эратосфена.
14. Конечные цепные дроби.
15. Подходящие дроби и их основные свойства.
16. Теорема о представлении рациональных чисел конечными цепными дробями.
17. Применение конечных цепных дробей к нахождению линейного разложения *НОД*.
18. Бесконечные цепные дроби. Значение бесконечной цепной дроби.
19. Теорема о представлении иррациональных чисел бесконечными цепными

дробями.

20. Признак иррациональности числа и иррациональность числа e .
21. Подходящие дроби как наилучшие приближения действительных чисел рациональными.*
22. Отношение сравнимости по модулю и его основные свойства.
23. Кольцо Z_n , поле Z_p и группа Z_n^* .
24. Полная и приведённая системы вычетов.
25. Мультипликативные функции.
26. Функция Эйлера и её основные свойства.
27. Теоремы Эйлера и Ферма.
28. Китайская теорема об остатках.
29. Полиномиальные сравнения и их решения.
30. Редукция сравнения по составному модулю к модулю, являющемуся степенью простого числа, а затем – к простому модулю.
31. Структура решений линейного сравнения первой степени. Методы решения.
32. Показатель числа (или класса вычетов) по заданному модулю и его основные свойства.
33. Первообразные корни по заданному модулю. Количество и структура первообразных корней.
34. Существование первообразных корней по простому модулю.
35. Первообразные корни по модулям p и $2p$ (p – простое число).
36. Индекс числа (или класса вычетов) относительно первообразного корня по данному модулю.
37. Индексы по модулям p и $2p$ (p – простое число).
38. Двучленные сравнения по простому модулю.
39. Квадратичные вычеты и невычеты.
40. Символ Лежандра и его свойства.
41. Квадратичный закон взаимности Гаусса*. Сравнения второй степени по произвольному модулю*.
42. Нахождение остатков полиномиальных и экспоненциальных выражений с помощью теоремы Эйлера.
43. Проверка арифметических действий с помощью сравнений по подходящим модулям.
44. Обобщённый признак делимости Паскаля.
45. Признаки делимости на 2^m , 5^m , 3 , 9 , 11 [7 , 13]*.
46. Конструирование признаков делимости на заданное число.
47. Конечные и бесконечные десятичные дроби.*
48. Определение алгебраических и трансцендентных (над \mathcal{Q}) чисел.
49. Доказательство существования трансцендентных чисел по Кантору.*
50. Теорема Эрмита-Линдемана.*
51. Теорема Лиувилля о приближениях алгебраического числа рациональными числами и её применение к построению трансцендентных чисел и доказательству иррациональности некоторых чисел.*

3.2. Домашние задания

Задание 1. Функция $\pi(x)$ и неравенство Чебышева.

1. Что такое простое число?
2. Каково определение функции $\pi(x)$?

3. Вычислите $\pi(0, 5)$, $\pi(2, 999)$, $\pi(17)$.
4. Сформулируйте неравенства Чебышева.
5. Сформулируйте асимптотический закон распределения простых чисел.
6. Сформулируйте постулат Бертрана.

Задание 2. Представление квадратичных иррациональностей периодическими цепными дробями.

1. Что такое бесконечная цепная дробь?
2. Приведите примеры бесконечных цепных дробей.
3. Что такое квадратичная иррациональность?
4. Приведите примеры квадратичных иррациональностей.
5. Что такое (смешанно) периодическая бесконечная цепная дробь?
6. Приведите примеры (смешанно) периодических бесконечных цепных дробей.
7. Сформулируйте теорему Лагранжа.
8. Изложите основные идеи доказательства теоремы Лагранжа.
9. Разложите в бесконечные цепные дроби иррациональности $\sqrt{13}$, $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$.
10. Сформулируйте теорему о чисто периодических бесконечных цепных дробях.
11. Сформулируйте теорему о разложении в периодические бесконечные цепные дроби квадратных корней из натуральных неквадратных чисел.
12. Разложите в бесконечные цепные дроби $\sqrt{12}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{19}$.

Задание 3. Представление натуральных чисел в виде суммы двух квадратов.

1. Что такое задача о представлении натуральных чисел в виде суммы двух квадратов?
2. Представьте (если возможно) в виде сумм двух квадратов числа $3, 4, 5, 7, 11, 13, 27$.
3. Сформулируйте основной результат о представлении простого числа в виде суммы двух квадратов.
4. Докажите, что простое число вида $p = 4n+3$ не представимо в виде суммы двух квадратов.
5. Изложите основные идеи доказательства представимости простого числа вида $p = 4n+1$ в виде суммы двух квадратов.
6. Сформулируйте общий результат о представлении натурального числа в виде суммы двух квадратов.
7. Докажите, что если два числа представимы в виде суммы двух квадратов, то и их произведение тоже представимо в этом виде.
8. Какова связь задачи о представлении натуральных чисел в виде суммы двух квадратов с теорией разложения квадратичных иррациональностей в цепные дроби?
9. Найдите, основываясь на теории разложения квадратичных иррациональностей в цепные дроби, представление в виде суммы двух квадратов простых чисел $p = 73, 97, 101$.

Задание 4. Приближения действительных чисел подходящими дробями.

1. Что такое подходящие дроби?
2. Приведите примеры подходящих дробей.
3. Сформулируйте основные свойства подходящих дробей.

- Докажите несколько нетривиальных свойств подходящих дробей.
- Обоснуйте сходимость подходящих дробей.
- Найдите приближение числа e подходящими дробями с точностью до $0,001$.
- Сформулируйте и докажите результат о том, что рациональная дробь, достаточно хорошо аппроксимирующая действительное число, совпадает с одной из подходящих дробей.

Задание 5. Системы сравнений.

- Что такое полиномиальное сравнение?
- Что такое система полиномиальных сравнений?
- Что значит решить систему полиномиальных сравнений?
- Сформулируйте теорему о структуре решений системы сравнений первой степени.
- Приведите примеры совместной и несовместной систем сравнений первой степени.
- Докажите что любая система сравнений первой степени эквивалентна системе сравнений с попарно взаимно простыми модулями.
- Решите системы:

$$\begin{cases} 2 \cdot x \equiv 1 \pmod{6} \\ 3 \cdot x \equiv 2 \pmod{4} \\ 5 \cdot x \equiv 7 \pmod{8} \end{cases}, \begin{cases} 32 \cdot x \equiv 14 \pmod{24} \\ 13 \cdot x \equiv 222 \pmod{144} \\ 15 \cdot x \equiv 77 \pmod{88} \end{cases}, \begin{cases} 32 \cdot x \equiv 14 \pmod{27} \\ 13 \cdot x \equiv 22 \pmod{144} \\ 15 \cdot x \equiv 77 \pmod{88} \end{cases}$$

Задание 6. Квадратичные вычеты и невычеты.

- Что такое квадратичное сравнение?
- Что такое квадратичный вычет и невычет?
- Приведите примеры квадратичных вычетов и невычетов по различным модулям.
- Докажите, что по любому простому модулю количество квадратичных вычетов равно количеству квадратичных невычетов.
- Докажите, что решение произвольного квадратичного сравнения $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \equiv 0 \pmod{m}$ сводится к решению двучленного сравнения вида $x^2 \equiv A \pmod{M}$.
- Опишите алгоритм решения сравнения вида $x^2 \equiv A \pmod{M}$ по любому модулю M .
- Решите квадратичные сравнения:
 $3x^2 + 2x - 5 \equiv 0 \pmod{5}$, $8x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod{12}$.

Задание 7. Символ Лежандра и закон взаимности Гаусса.

- Что такое символ Лежандра?
- Какая связь символа Лежандра с квадратичными сравнениями?
- Сформулируйте основные правила для вычисления символа Лежандра.
- Докажите несколько нетривиальных правил.
- Вычислите $\left(\frac{15}{7}\right)$, $\left(\frac{43}{59}\right)$, $\left(\frac{55}{2}\right)$.
- Сформулируйте квадратичный закон взаимности Гаусса.
- Как связаны $\left(\frac{43}{59}\right)$ и $\left(\frac{59}{43}\right)$, $\left(\frac{53}{2}\right)$ и $\left(\frac{2}{53}\right)$, $\left(\frac{37}{101}\right)$ и $\left(\frac{101}{37}\right)$?
- Разрешимы ли сравнения: $x^2 \equiv 17 \pmod{43}$, $x^2 \equiv 43 \pmod{17}$?
- Опишите основные идеи любимого Вами доказательства квадратичного закона взаимности Гаусса.

Задание 8. Теорема Лиувилля о приближениях алгебраического числа рациональными числами и её применение к построению трансцендентных чисел и доказательству иррациональности некоторых чисел.

1. Что такое алгебраическое число?
2. Что такое трансцендентное число?
3. Докажите, что число $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$ является алгебраическим.
4. Приведите известные Вам примеры трансцендентных чисел.
5. Сформулируйте теорему Лиувилля.
6. Докажите теорему Лиувилля для квадратичной иррациональности.
7. Опишите основные идеи общего доказательства теоремы Лиувилля.
8. Приведите пример трансцендентного числа Лиувилля.

3.3. Зачет с оценкой

1. Теорема о делении целых чисел с остатком.
2. Основные свойства делимости целых чисел нацело.
3. *НОД* и *НОК* целых чисел: определение, свойства, способы нахождения, примеры.
4. Алгоритм Евклида и линейное разложение *НОД*(a, b).
5. Взаимно простые числа и их свойства. Примеры.
6. Простые числа и их свойства. Основная теорема арифметики.
7. Вычисление *НОД*(a, b) и *НОК*[a, b] с помощью канонических разложений чисел a, b . Примеры.
8. Функция Эйлера: определение, вычисление $\varphi(p^\alpha)$, примеры.
9. Функция Эйлера: мультипликативность, примеры.
10. Бесконечность множества простых чисел. Решето Эратосфена.
11. Представление рациональных чисел конечными цепными дробями.
12. Подходящие дроби и их основные свойства.
13. Представление иррациональных чисел бесконечными цепными дробями. Примеры.
14. Квадратичные иррациональности и периодические бесконечные цепные дроби. Примеры.
15. Сравнения и их свойства. Проверка арифметических действий с помощью сравнений. Примеры.
16. Кольцо вычетов Z_m , группа Z_m^* , поле Z_p .
17. Общий признак делимости Паскаля. Признаки делимости на $2^n, 5^n, 3, 9, 11$.
18. Теоремы Эйлера и Ферма. Примеры использования для вычисления остатков.
19. Полиномиальные сравнения и их решения. Редукция сравнения по составному модулю к модулю, являющемуся степенью простого числа, а затем – к простому модулю.
20. Теорема о сравнениях первой степени. Различные методы решения сравнений первой степени. Примеры.
21. Показатели и их свойства. Первообразные корни. Нахождение первообразных корней. Примеры.
22. Существование первообразных корней по простому модулю. Примеры.
23. Представление рациональных чисел десятичными дробями. Длина периода десятичного представления рационального числа. Примеры.
24. Индексы и их свойства. Таблицы индексов и антииндексов. Решение двучленных сравнений $a \cdot x^n \equiv b \pmod{m}$ с помощью индексов. Примеры.
25. Числа алгебраические и трансцендентные. Теорема Лиувилля и построение трансцендентных чисел. Примеры.