МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Тобольский педагогический институт им. Д.И.Менделеева (филиал)
Тюменского государственного университета

УТВЕРЖДАЮ
Директор
_______________ Шилов С.П

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Профили: математика; информатика
Форма обучения очная

1. Паспорт оценочных материалов по дисциплине

1.1. Перечень компетенций

Код и наименование компетенции	Компонент (знаниевый/функциональный)
ОК-3 способность использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве	Знает основные понятия математического анализа, основные свойства и теоремы математического анализа, основные методы математического анализа.
	Знает способы решения типовых математических задач в области математического анализа
	Умеет вычислять пределы, находить производные и вычислять интегралы; используя определения, проводить исследования, связанные с основными понятиями; применять методы математического анализа к доказательству теорем и решению задач
ПК-4 способность использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемого учебного предмета	Знает области приложения знаний из математического анализа в содержании школьного курса математики
	Может составить алгоритм решения задачи в области математического анализа для использования в учебном процессе
	Может пояснить решение типовых школьных задач в области математического анализа

1.2. Паспорт оценочных средств по дисциплине

№ п/п	Темы дисциплины в ходе текущего контроля, вид промежуточной аттестации	Код компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства (количество вариантов, заданий и т.п.)
1 семестр			
1	Введение в анализ	ОК-3, ПК-4	Контрольные вопросы Практические работы Проверочные работы
2	Дифференциальное исчисление для функций одной переменной	ОК-3, ПК-4	Контрольные вопросы Практические работы Проверочные работы
	Зачет	ОК-3	Вопросы к зачету (теоретический и задача)
2 семестр			
3	Интегральное исчисление для функций одной переменной	ОК-3, ПК-4	Контрольные вопросы Практические работы Проверочные работы
	Экзамен	ОК-3, ПК-4	Вопросы к экзамену (теоретический и задача)
3 семестр			
4	Ряды	ОК-3, ПК-4	Контрольные вопросы Практические работы Проверочные работы

	Зачет	ОК-3, ПК-4	Вопросы к зачету (теоретический и задача)
4 семестр			
5	Дифференциальное исчисление для функций нескольких переменных	ОК-3, ПК-4	Контрольные вопросы Практические работы Проверочные работы
6	Интегральное исчисление для функций нескольких переменных	ОК-3, ПК-4	Контрольные вопросы Практические работы Проверочные работы
	Контрольная работа	ОК-3	Задачи.
	Экзамен	ОК-3, ПК-4	Вопросы к экзамену (теоретический и задача)

1.3. Показатели, критерии и шкала оценивания сформированности компетенций

Код и наименование компетенции	Компонент (знаниевый/функциональный)	Оценочные материалы	Критерии оценивания
ОК-3 способность использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве	Знает основные понятия математического анализа, основные свойства и теоремы математического анализа, основные методы математического анализа.	Контрольные вопросы Теоретические вопросы к зачету (экзамену)	*Пороговый уровень:* может выполнять работы под контролем преподавателя. *Базовый уровень:* может выполнять работы самостоятельно. *Повышенный уровень:* готов выполнять работы в условиях учебно-воспитательного процесса с обучающимися.
	Знает способы решения типовых математических задач в области математического анализа	Практические работы Проверочные работы Контрольная работа	
	Умеет вычислять пределы, находить производные и вычислять интегралы; используя определения, проводить исследования, связанные с основными понятиями; применять методы математического анализа к доказательству теорем и решению задач		
ПК-4 способность использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемого учебного предмета	Знает области приложения знаний из математического анализа в содержании школьного курса математики	Контрольные вопросы Практические работы Теоретические вопросы к экзамену	*Пороговый уровень:* может выполнять работы под контролем преподавателя. *Базовый уровень:* может выполнять работы самостоятельно. *Повышенный уровень:* готов выполнять работы в условиях учебно-воспитательного процесса с обучающимися.
	Может составить алгоритм решения задачи в области математического анализа для использования в учебном процессе		
	Может пояснить решение типовых школьных задач в области математического анализа		

2. Виды и характеристика оценочных средств

Текущий контроль осуществляется проверкой наличия конспектов лекций, собеседованием по вопросам к допуску и контролем за выполнением заданий в ходе лабораторных работ, проверкой тестов и заданий самостоятельной работы

2.1. Контрольные вопросы

Контрольные вопросы используется для проведения анализа материала лекций, самостоятельного углубления знаний, а также для самопроверки знаний студентов по отдельным вопросам и/или темам дисциплины. Ответ оценивается в баллах «2», «1» или «0». Критерии оценки ответа (табл.) доводятся до сведения обучающихся в начале занятий. Оценка объявляется в конце занятия.

Балл	Критерий оценивания
2	- показывает знание основных понятий темы, грамотно пользуется терминологией; - проявляет умение анализировать и обобщать информацию, навыки связного описания явлений и процессов; - демонстрирует умение излагать учебный материал в определенной логической последовательности; - показывает умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами; - демонстрирует сформированность и устойчивость знаний, умений и навыков; - могут быть допущены одна–две неточности при освещении второстепенных вопросов.
1	- неполно или непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения материала; - имелись затруднения или допущены ошибки в определении понятий, использовании терминологии, описании явлений и процессов, исправленные после наводящих вопросов; - выявлена недостаточная сформированность знаний, умений и навыков, студент не может применить теорию в новой ситуации.
0	- не раскрыто основное содержание учебного материала; - обнаружено незнание или непонимание большей или наиболее важной части учебного материала; - допущены ошибки в определении понятий, при использовании терминологии, в описании явлений и процессов, решении задач, которые не исправлены после нескольких наводящих вопросов; - не сформированы компетенции, отсутствуют соответствующие знания, умения и навыки.

2.2. Практические работы

Задания на практических занятиях используются для оценки умений по отдельным темам дисциплины. Отчет оценивается в баллах «3», «2», «1» или «0».

Задания представляются в виде письменной работы или файла. При необходимости сопровождается дополнительными материалами, в том числе, мультимедийными.

Содержание отчета и критерии оценки ответа доводятся до сведения обучающихся в начале занятий. Оценка объявляется непосредственно после сдачи отчета и проверки по выполненному заданию на текущем или следующем занятии.

Балл	Критерий оценивания заданий
MAX	Задания выполнены правильно в полном объеме. Оформление соответствует всем требованиям. Может ответить на уточняющие вопросы.
2/3 MAX	Задания выполнены правильно и практически полностью. Оформление в основном соответствует всем требованиям. Может ответить на некоторые уточняющие вопросы.
1/3 MAX	Задания выполнены частично правильно и не полностью. Оформление соответствует отдельным требованиям. С трудом может ответить на некоторые уточняющие вопросы.

2.3. Проверочные работы

Проверочные работы используются для оценки практических умений по решению задач, выявлению алгоритма задач и способности объяснить решение задачи, как основа для формирования профессиональных компетенций.

Отчет о выполнении заданий оценивается по 5-ти балльной системе. Критерии оценки ответа (табл.) доводятся до сведения обучающихся в начале занятий.

Балл	**Критерий оценивания**
"отлично"	Выполнил работу самостоятельно и без ошибок; допустил не более одного недочета; демонстрирует понимание способов и видов учебной деятельности по созданию алгоритма и программы; владеет терминологией и может прокомментировать этапы своей деятельности и полученный результат; может предложить другой способ деятельности или алгоритм выполнения задания.
"хорошо"	Выполнил работу самостоятельно и без ошибок; допустил не более двух (для простых задач) и трех (для сложных задач) недочетов; демонстрирует понимание способов и видов учебной деятельности по созданию алгоритма и программы; может прокомментировать этапы своей деятельности и полученный результат (например, дает комментарии о выполненных действиях при форматировании алгоритма ли листинга программы; затрудняется предложить другой способ деятельности или алгоритм выполнения задания.
"удовлетворительно"	Если студент правильно выполнил более 50% всех заданий и при этом: демонстрирует общее понимание способов и видов учебной деятельности по созданию алгоритма и программы; может прокомментировать некоторые этапы своей деятельности и полученный результат. Или при условии выполнения всей работы студент допустил: для простых задач – одну грубую ошибку или более четырех недочетов; для сложных задач – две грубые ошибки или более восьми недочетов. Сложным считается задание, которое естественным образом разбивается на несколько частей при его выполнении.
"неудовлетворительно"	Допустил число ошибок и недочетов, превышающее норму, при которой может быть выставлена оценка «удовлетворительно»; правильно выполнил не более 10% всех заданий. Или не приступил к выполнению работы.

2.4. Тесты

Тестирование проводится для текущего контроля знаний и умений по предмету.
При оценивании теста учитывается количество правильных ответов.
Шкала оценивания результатов:
29-35 правильных ответов - отлично,
21-28 правильных ответов - хорошо,
12-20 правильных ответов - удовлетворительно,
менее 12 правильных ответов - неудовлетворительно.

2.5. Зачет

Зачет является средством проведения промежуточной аттестации в 1 и 3 семестре, проходит в форме собеседования по вопросам.

Оценка «ЗАЧТЕНО» (базовый или повышенный уровень: готов к самостоятельному выполнению работ, в том числе, в учебно-воспитательном процессе)

- Знает основные понятия математического анализа, основные свойства и теоремы математического анализа, основные методы математического анализа, способы решения типовых математических задач.
- Знает области приложения знаний в содержании школьного курса математики
- Умеет применять методы математического анализа к доказательству теорем и решению задач.
- Может пояснить решение типовых школьных задач в области математического анализа.
- Отвечает на большинство дополнительных вопросов.

Оценка «НЕ ЗАЧТЕНО» (низкий или пороговый уровень: может выполнять работы только под контролем преподавателя)

- Не знает большинство понятий математического анализа, свойств и теорем математического анализа, основных методов математического анализа, способов решения типовых математических задач.
- Не может назвать области приложения знаний в содержании школьного курса математики
- Не умеет применять методы математического анализа к доказательству теорем и решению задач.
- С трудом может пояснить решение типовых школьных задач в области математического анализа.
- Затрудняется отвечать на дополнительные вопросы.

2.6. Экзамен

Экзамен является средством проведения промежуточной аттестации во 2 и 4 семестре, проходит в форме собеседования по вопросам.

Допуском к экзамену в 4 семестре является контрольная работа по одному из разделов дисциплины.

Результаты освоения дисциплины во время экзамена оцениваются степенью полноты ответа на вопросы билета.

Оценка «отлично» (*повышенный уровень:* готов выполнять работы в условиях учебно-воспитательного процесса с обучающимися):

- Отлично знает основные понятия математического анализа, основные свойства и теоремы математического анализа, основные методы математического анализа, способы решения типовых математических задач.
- Отлично знает области приложения знаний в содержании школьного курса математики
- Умеет свободно применять методы математического анализа к доказательству теорем и решению задач.
- Может доступно пояснить решение типовых школьных задач в области математического анализа.
- Свободно отвечает на дополнительные вопросы.

Оценка «хорошо» (*базовый уровень:* может выполнять работы самостоятельно):

- Хорошо знает основные понятия математического анализа, основные свойства и теоремы математического анализа, основные методы математического анализа, способы решения типовых математических задач.
- Хорошо знает области приложения знаний в содержании школьного курса математики
- Умеет применять методы математического анализа к доказательству теорем и решению задач.
- Может пояснить решение типовых школьных задач в области математического анализа.
- Отвечает на большинство дополнительных вопросов.

Оценка «удовлетворительно» (*пороговый уровень:* может выполнять работы под контролем преподавателя):

- Знает отдельные понятия математического анализа, свойства и теоремы математического анализа, методы математического анализа, способы решения типовых математических задач.
- С трудом может назвать области приложения знаний в содержании школьного курса математики
- С трудом применяет методы математического анализа к решению задач.
- Не может доступно пояснить решение типовых школьных задач в области математического анализа.
- Затрудняется отвечать на дополнительные вопросы.

Экзамен (зачет) принимается преподавателем, проводившим занятия, или читающим лекции по данной дисциплине. В случае отсутствия ведущего преподавателя зачет принимается преподавателем, назначенным распоряжением заведующего кафедрой. С разрешения заведующего кафедрой на зачете может присутствовать преподаватель кафедры, привлеченный для помощи в приеме зачета.

Во время зачета обучающиеся могут пользоваться с разрешения ведущего преподавателя соответствующими техническими и программными средствами.

Время для подготовки 60 мин – для формулировки ответа на теоретический вопрос и решение задачи. Время ответа - не более 7-10 минут. Преподавателю предоставляется право задавать обучающимся дополнительные вопросы в рамках программы дисциплины. Общее время сдачи экзамена на 1 студента – 15 минут.

Нарушение дисциплины, списывание, использование обучающимися неразрешенных печатных и рукописных материалов, мобильных телефонов, коммуникаторов, планшетных компьютеров, ноутбуков и других видов личной коммуникационной и компьютерной техники во время зачета запрещено. В случае нарушения этого требования преподаватель обязан удалить обучающегося из аудитории и проставить ему в ведомости оценку «не зачтено».

Количественная оценка «отлично», «хорошо» или «удовлетворительно», внесенная в зачетную книжку и зачетно-экзаменационную ведомость, является результатом успешного усвоения учебного материала. Результат экзамена в зачетную книжку выставляется в день проведения в присутствии самого обучающегося. Преподаватели несут персональную ответственность за своевременность и точность внесения записей о результатах промежуточной аттестации в зачетно-экзаменационную ведомость и в зачетные книжки.

Если обучающийся явился на экзамен и отказался от прохождения аттестации в связи с неподготовленностью, то в зачетно-экзаменационную ведомость ему выставляется оценка в соответствии с набранными баллами в течение семестра.

Неявка на экзамен при условии нулевой аттестации в течение семестра отмечается в зачетно-экзаменационной ведомости словами «не явился».

Обучающимся, не сдавшим экзамен в установленные сроки по уважительной причине, индивидуальные сроки проведения экзамена определяются приказом ректора Университета. Обучающиеся, имеющие академическую задолженность, сдают экзамен в сроки, определяемые Университетом. Информация о ликвидации задолженности отмечается в экзаменационном листе. Допускается с разрешения деканата и досрочная сдача экзамена с записью результатов в экзаменационный лист.

Инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья могут сдавать экзамены в сроки, установленные индивидуальным учебным планом. Инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья, имеющие нарушения опорно-двигательного аппарата, допускаются на аттестационные испытания в сопровождении ассистентов-сопровождающих.

2.7. Контрольная работа

Контрольная работа в 4 семестре представляет собой проведение методического анализа содержательной части школьного предмета «Алгебра и начала анализа» и подбор школьных заданий различного уровня сложности (базовый, повышенный, творческий) по одной из понятийных линий математического анализа.

Выполнение и зачет по контрольной работе является допуском к экзамену.

По результатам оценки контрольной работы студенту ставится оценка «зачтено».

Оценка «ЗАЧТЕНО»:

- Знает основные понятия математического анализа, основные свойства и теоремы математического анализа, основные методы математического анализа, способы решения типовых математических задач.
- Знает области приложения знаний в содержании школьного курса математики
- Умеет применять методы математического анализа к доказательству теорем и решению задач.
- Может пояснить решение типовых школьных задач в области математического анализа.

Оценка «НЕ ЗАЧТЕНО»:

- Не знает большинство понятий математического анализа, свойств и теорем математического анализа, основных методов математического анализа, способов решения типовых математических задач.
- Не может назвать области приложения знаний в содержании школьного курса математики
- Не умеет применять методы математического анализа к доказательству теорем и решению задач.
- С трудом может пояснить решение типовых школьных задач в области математического анализа.

– Затрудняется отвечать на дополнительные вопросы.

3. Оценочные средства

3.1. Контрольные вопросы

Раздел 1. Введение в анализ

1. Определения

1. Переменная величина.
2. Постоянная величина.
3. Функция одной переменной.
4. Числовая последовательность.
5. Возрастающая числовая последовательность.
6. Убывающая числовая последовательность.
7. Последовательность, ограниченная снизу.
8. Последовательность, ограниченная сверху.
9. Предел последовательности.
10. Предел функции при $x \to \infty$ (с геометрической иллюстрацией).
11. Предел функции при $x \to a$ (с геометрической иллюстрацией).
12. Бесконечно малая функция.
13. Бесконечно большая функция при $x \to a$.
14. Бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с другой.
15. Бесконечно малые одного порядка.
16. Эквивалентные бесконечно малые.
17. Функция, непрерывная в точке (2 определения).

2. Вопросы без доказательства

1. Свойства бесконечно малых.
2. Теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций.
3. Теорема о связи предела функции с бесконечно малой функцией:

а) прямая;
б) обратная.

4. Теоремы о пределах.
5. Признаки существования:

а) предела последовательности;
б) предела функции.

6. Второй замечательный предел.
7. Теорема об эквивалентных бесконечно малых.
8. Свойства непрерывных в точке функций.
9. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
10. Классификация точек разрыва.

3. Вопросы с доказательством

1. Теорема о сумме бесконечно малых.
2. Теорема о пределе суммы функций.
3. Теорем о пределе произведения функций.
4. Вывод формулы первого замечательного предела.

Раздел 2. Дифференциальное исчисление для функций одной переменной

1 Определения

1. Возрастающая на интервале функция f(x).

2. Убывающая на интервале функция f(x).
3. Точка максимума функции f(x).
4. Точка минимума функции f(x).
5. Критические точки I рода функции f(x).
6. Выпуклая на интервале функция f(x).
7. Вогнутая на интервале функция f(x).
8. Точка перегиба функции f(x).
9. Критические точки II рода функции f(x).
10. Точка максимума функции f(x, y).
11. Точка минимума функции f(x, y).

2. Вопросы без доказательства

1. Первое достаточное условие экстремума функции f(x).
2. Достаточное условие существования точки перегиба функции f(x).
3. Признак существования вертикальной асимптоты.
4. Признак существования горизонтальной асимптоты.
5. Признак существования наклонной асимптоты.
6. Необходимое условие экстремума функции f(x).
7. Достаточное условие экстремума функции f(x).

3. Вопросы с доказательством

1. Достаточное условие возрастания функции f(x) на интервале.
2. Достаточное условие убывания функции f(x) на интервале.
3. Необходимое условие экстремума функции f(x). Следствие.
4. Второе достаточное условие экстремума функции f(x).
5. Достаточное условие выпуклости функции f(x) на интервале.
6. Достаточное условие вогнутости функции f(x) на интервале.

Раздел 3. Интегральное исчисление для функций одной переменной

1. Определения

1.Первообразная функция.
2.Неопределенный интеграл.
3.Рациональная дробь.
4.Правильные рациональные дроби.
5.Неправильные рациональные дроби.
6.Определенный интеграл.
7.Интеграл с переменным верхним пределом.

2. Вопросы без доказательства

1. Теоремы о первообразной функции.
2. Свойства неопределенного интеграла.
3.Формула интегрирования по частям для неопределенного интеграла и основные функции, которые интегрируются по частям.
4.Основные свойства определенного интеграла.
5.Теоремы об оценке определенного интеграла. Геометрический смысл теоремы 1.
6.Теорема о среднем для определенного интеграла.
7.Геометрический смысл определенного интеграла.
8.Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат.
9.Вычисление площадей фигур, ограниченных параметрически заданной кривой.
10. Вычисление длины дуги (плоской и пространственной), заданной параметрически.
11. Вычисление длины дуги, заданной в полярной системе координат.

3. Вопросы с доказательством

1. Теорема о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом.
2. Формула Ньютона-Лейбница.
3. Вычисление площади фигуры в полярной системе координат.
4. Вычисление объема тела вращения вокруг оси Ох.
5. Вычисление длины дуги в декартовой системе координат.

3.2. Проверочные работы

Проверочная работа № 1. Тема: «Функция, ее область определения, промежутки знакопостоянства, четность, нечетность, периодичность, обратная функция»

Вариант № 1

1. Укажите область определения и найдите корни (нули) функций:

1) $y = \ln(x+3)$; 2) $y = 8x - x^3$; 3) $y = \cos 3x$.

2. Определите промежутки знакопостоянства функций: 1) $y = \ln\dfrac{x-2}{x+2}$; 2) $y = \lg|x-1|$.

3. Укажите, какие из нижеприведенных функций являются: а) четными; б) нечетными?

1) $y = \dfrac{x^2}{\cos x} - \sin x^2$; $y = 3x\sin x + 2\cos x$; 2) $y = \lg(\cos 2x)$.

4. Найти периоды функций: 1) $y = \sin 3x + \cos x$; 2) $y = \cos^2(3x)$.

5. Укажите вид функции, обратной данной (по образцу: $y = 2x + 1$, $x = 2y + 1$, $y = \dfrac{x-1}{2}$):

1) $y = 5^x$; 2) $y = \dfrac{x-1}{x+2}$.

6. Построить графики функций: 1) $y = \mathrm{tg}x$; 2) $y = \mathrm{tg}x + 1$; 3) $y = \mathrm{tg}x - 1$.

Вариант № 2

1. Укажите область определения и найдите корни (нули) функций:

1) $y = \ln(x-3)$; 2) $y = x^3 - 27x$; 3) $y = \sin 2x$.

2. Определите промежутки знакопостоянства функций: 1) $y = \ln\dfrac{x-1}{x+1}$; 2) $y = \lg|x+1|$.

3. Укажите, какие из нижеприведенных функций являются: а) четными; б) нечетными ?

1) $y = \cos x + x\cdot\sin x$; 2) $y = \log_3\dfrac{2+x}{-x+2}$.

4. Найти периоды функций: 1) $y = tg(\dfrac{3}{5}x + \dfrac{\pi}{6})$; 2) $y = \sin^2 x$

5. Укажите вид функции, обратной данной (по образцу: $y = 2x + 1$, $x = 2y + 1$, $y = \dfrac{x-1}{2}$):

1) $y = 3^x$; 2) $y = \dfrac{x+1}{x-2}$.

6. Построить графики функций: 1) $y = x^2$; 2) $y = (x-1)^2 + 2$; 2) $y = -(x-1)^2 - 2$.

Проверочная работа № 2. Тема: «Производная»

1. Найти y', если $y = 8x^4 - 4x^3 + 12x^2 - \dfrac{x}{3} + 10$.

2. Найти y $^{/}$(-1), если $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{2}{x^4}$.

3. Решить неравенство: $f^{/}(x) > 0$, если $f(x) = x^2(3x^2 - 4x - 12) + 3$.
4. Решить уравнение $f^{/}(x) = 0$, если $f(x) = 5^{2x} - 2x \cdot \ln 5$.

5. Найти $y^{/}$, если $y = \dfrac{1}{2}\cos(6x-1) + 5\sin(1-2x)$

6. Найти $y^{/}$, если $y = \operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$. **7**. Найти $y^{/}$, если $y = \ln(e^{-2x} + 1)$.

8. Найти $y^{/}$, если $y = \sqrt{3x^2 - 6x + 1}$. **9.** Найти $y^{/}$, если $y = e^{\operatorname{ctg}x} - 2\cos^2\dfrac{x}{2}$.

10. Найти $y^{/}\left(\dfrac{e}{2}\right)$, если $y = x^4 - \ln(2x) + 3x + 1$.

Проверочная работа № 3. Тема: «Производная и дифференциал функции»

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = x^2 - 4x + 3)$; б) $y = 5x^2 \cdot \sin x$; в) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

2. Найти производные функций:

а) $y = (1 + 5x)^3$; б) $y = \sin 3x$.

3. Найти производную второго порядка функции

$$y = x \cdot \sin x$$

4. Найти дифференциалы функций:

а) $y = 7x^3 + 2x$; 2) $y = 2^{5x+3}$.

Проверочная работа № 4. Тема: «Предел и непрерывность»

1. Найти формулу общего члена последовательности: $0, 1, \dfrac{4}{3}, \dfrac{6}{4}, \dfrac{8}{5}, \ldots$

2. Доказать равенство, пользуясь определением предела функции в точке:

$$\lim_{x\to 6}\left(1 - \frac{x}{3}\right) = -1$$

3. Вычислить предел функции:

а) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{1 - \sqrt{1+x}}$, б) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{tg^2 3x \cdot \sin 5x}{(1-\cos 4x)tg 2x}$, в) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2 + x}{2x^2 - 1}\right)^{2x}$.

4. Исследуйте функцию на непрерывность, установите характер точек разрыва и постройте график: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, x < 0 \\ x, 0 \le x < 2 \\ 2, 2 \le x < 5 \\ \sin(x-5), x \ge 5 \end{cases}$

Проверочная работа № 5. Тема: "Дифференциальное исчисление функций одной переменной"

1. Пользуясь определением производной вычислить производную функции

$$y=\sqrt{3x}+5.$$

2. Найти производную функции:

а) $y=2^{tg\frac{1}{x}}$; б) $y=\arcsin\dfrac{2x^3}{1+x^2}$.

3. Найти производную функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x=2t^3-9t^2+12t-1 \\ y=t^2+t+1 \end{cases}$$

4. Найти производную функции, пользуясь методом логарифмического дифференцирования: $y=(\sqrt{x})^{\ln x}$.

5. Составить уравнение касательной к параболе $y=x^2-2x-5$, параллельной хорде, соединяющей точки $x_1=1$ и $x_2=2$.

Проверочная работа № 6. Тема: "Неопределенный и определенный интеграл"

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\dfrac{-3x-2}{\sqrt{4-x^2}}dx$; б) $\int x\cdot e^{-3x}dx$; в) $\int\dfrac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$; г) $\int\dfrac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

2. Вычислить интеграл: $\int\limits_2^5\dfrac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми: $y^2=4x$, $x^2=4y$.

4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX криволинейно трапеции, ограниченной сверху $y=x^2+1$, с боков $x=-1$ и $x=1$.

5. Найти длину кривой $r=\sqrt{2}\cdot\sin\varphi$.

3.3. Тесты

1. Пределы

1.1. Среди графиков, приведенных на рис. 1.1, указать ВСЕ, соответствующие формуле $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$

1.2. Среди графиков, приведенных на рис. 1.1, указать ВСЕ, соответствующие формуле $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

1.3. Среди графиков, приведенных на рис. 1.1, указать ВСЕ, соответствующие формуле $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$

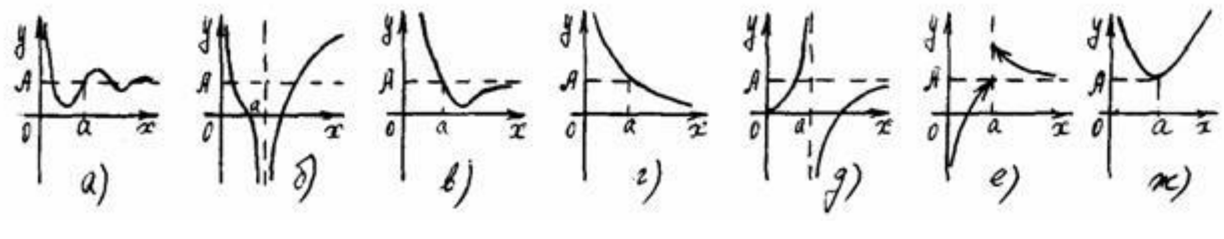
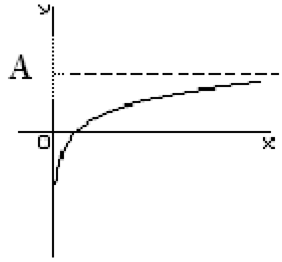


Рисунок 1

1.4. Указать ВСЕ утверждения, справедливые для графика функции, изображенного на рис. 1.2:



а)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$	б)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$	в)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$
г)	$\lim\limits_{x\to+0} f(x)=-\infty$	д)	$\lim\limits_{x\to+0} f(x)=A$	е)	$\lim\limits_{x\to+0} f(x)=0$

1.5. Если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=5$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ равен
а) 3; б) – 3; в) 0; г) ∞; д) не существует.

1.6. Если $\lim\limits_{x\to1} f(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{f(x)}$ равен
а) 3; б) – 3; в) 0;г) ∞; д) не существует.

1.7. Если $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{f(x)}$ равен
а) 3; б) – 3; в) 0; г) ∞; д) не существует.

1.8. Если $\lim\limits_{x\to1} f(x)=3$ и $f(x)$ –четная, то $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ равен
а) 3; б) – 3; в) 0; г) ∞; д) не существует.

1.9. Вычислить $\lim\limits_{x\to2}(x-2)\sin\dfrac{1}{x-2}$.
а) 1; б) – 1; в) 0; г) ∞; д) не существует.

1.10. Вычислить. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$
а) 1; б) – 1; в) 0; г) ∞; д) не существует.

1.11. Вычислить $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$.
а) 1; б) – 1; в) 0; г) ∞; д) не существует.

1.12. Дано $\lim\limits_{x\to2} f(x)=1\,000\,000\,000$
Укажите ВСЕ верные утверждения:
а) $f(x)$ ограничена в окрестности точки $x=2$;
б) $f(x)$ – бесконечно большая при $x\to2$;
в) $\dfrac{f(x)}{2}\to 500\,000\,000$ при $x\to2$;

г) $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая при $x \to 2$.

1.13. Известно, что при $x \to 0$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1000$. Какое из следующих утверждений верно при $x \to 0$?

а) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны;

б) $\alpha(x)$ более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$;

в) $\alpha(x)$ более низкого порядка малости, чем $\beta(x)$;

г) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ одного порядка малости.

1.14. Известно, что при $x \to x_0$ бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны ($\alpha(x) \sim \beta(x)$), Какое из следующих утверждений верно при $x \to x_0$?

а) $\alpha(x)$ более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$;

б) $\alpha(x)$ более низкого порядка малости, чем $\beta(x)$;

в) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ одного порядка малости;

г) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ нельзя сравнивать.

1.15. При $x \to 1$ укажите ВСЕ верные утверждения:

а) $\sin x \sim x$;

б) $\sin(x-1) \sim (x-1)$;

в) $\sin(x+1) \sim (x+1)$;

г) $\sin(1/x) \sim (1/x)$.

1.16. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} - \dfrac{4}{n^2} + \ldots - \dfrac{2n}{n^2}\right)\cdot(n+1)\right)$.

а) 1; б) – 1; в) 0; г) ∞; д) 1/2.

2. Непрерывность

2.1. Среди графиков, приведенных на рис. 2.1, укажите ВСЕ, на которых функция имеет в точке *a* разрыв второго рода.

2.2. Среди графиков, приведенных на рис. 2.1, укажите ВСЕ, на которых функция имеет в точке *a* разрыв первого рода.

2.3. Среди графиков, приведенных на рис. 2.1, укажите ВСЕ, на которых функция непрерывна в точке *a*:

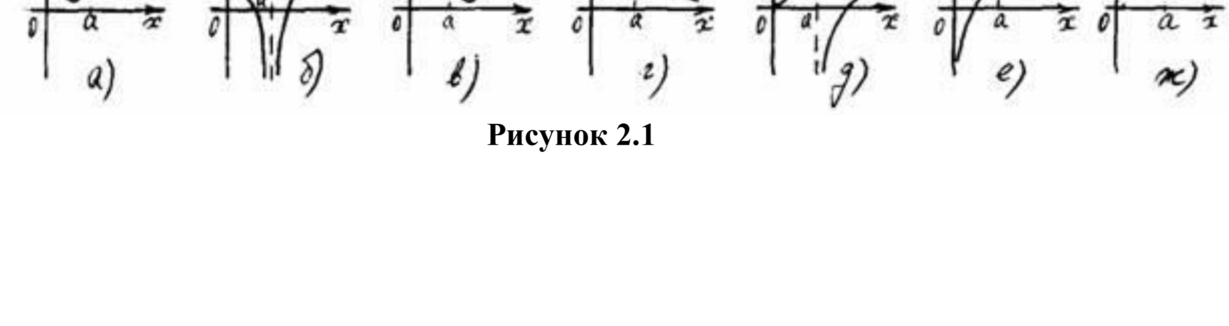


Рисунок 2.1

2.4. Известно, что $\lim\limits_{x\to c-0} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to c+0} f(x) = 18$. Какое из утверждений верно?
а) *c* – точка неустранимого разрыва первого рода;
б) *c* – точка устранимого разрыва первого рода;
в) *c* –точка разрыва второго рода;
г) *c* – точка непрерывности.

2.5. Известно, что $\lim\limits_{x\to c-0} f(x) = -5$; $\lim\limits_{x\to c+0} f(x) = -5$; $f(c) = -5$. Какое из утверждений верно?
а) *c* – точка неустранимого разрыва первого рода;
б) *c* – точка устранимого разрыва первого рода;
в) *c* –точка разрыва второго рода;
г) *c* – точка непрерывности.

2.6. Укажите, в каком случае в точке *c* функция $f(x)$ имеет устранимый разрыв:
а) $\lim\limits_{x\to c-0} f(x) = -5$; $\lim\limits_{x\to c+0} f(x) = -5$; $f(c) = 0$;
б) $\lim\limits_{x\to c-0} f(x) = -5$; $\lim\limits_{x\to c+0} f(x) = 5$; $f(c) = 5$;
в) $\lim\limits_{x\to c-0} f(x) = -5$; $\lim\limits_{x\to c+0} f(x) = -\infty$;
г) $\lim\limits_{x\to c-0} f(x) = -5$; $\lim\limits_{x\to c+0} f(x) = -5$; $f(c) = -5$.

2.7. Известно, что $f(x)$ – непрерывная функция. Какое из следующих утверждений верно?
а) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(x+\Delta x) - f(x)) = 1$;
б) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(x+\Delta x) - f(x)) = 0$;
в) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(x+\Delta x) - f(x)) = \infty$;
г) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(x+\Delta x) - f(x)) = -\infty$.

2.8. Функция $f(x)$ имеет устранимый разрыв в точке $x = 2$ и $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = 1$. Тогда $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)$ равен
а) 1; б) –1; в) 0; г) ∞; д) другой ответ.

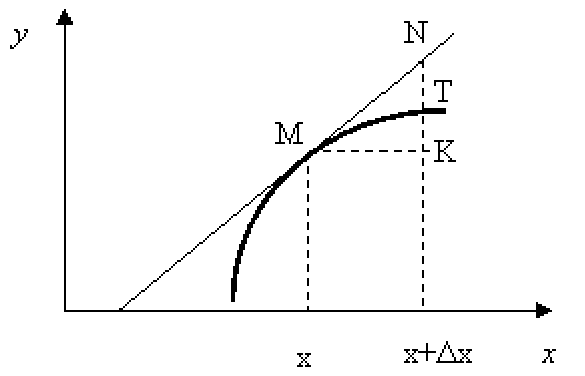
2.9. Известно, что $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывны в точке $x = 1$; $f(1) \neq 0$; $g(1) = 0$. Укажите ВСЕ функции непрерывные в точке $x = 1$:
а) $f(x)+g(x)$; б) $\dfrac{f(x)+g(x)}{x-1}$; в) $f(x)\cdot g(x)$; г) $\dfrac{x-1}{f(x)g(x)}$; д) $\dfrac{1}{f(x)} + g(x)$.

2.10. Укажите ВСЕ функции непрерывные в точке $x = 1$:
а) $\sin(x-1)$; б) $\dfrac{x-1}{\sin x}$; в) $\dfrac{\sin x}{x-1}$; г) $\dfrac{\sin x}{x} - 1$; д) $\sin\dfrac{1}{x-1}$.

2.11. Укажите, на каком из данных отрезков уравнение $\lg(x+2) + x = 0$ имеет действительный корень:
а) [-1; 0]; б) [0;1]; в) [1; 2]; г) [2; 3]; д) уравнение вообще не имеет действительных решений

3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

3.1. Какое из ниже перечисленных предложений определяет производную функции (когда приращение аргумента стремится к нулю)?
а) Отношение приращения функции к приращению аргумента;
б) Предел отношения функции к приращению аргумента;
в) Отношение функции к пределу аргумента;
г) Отношение предела функции к аргументу;
д) Предел отношения приращения функции к приращению аргумента.
3.2. Первая производная функции показывает
а) скорость изменения функции;
б) направление функции;
в) приращение функции;
г) приращение аргумента функции.
3.3. Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в некоторой точке, равен
а) отношению значения функции к значению аргумента в этой точке;
б) значению производной функции в этой точке;
в) значению дифференциала функции в этой точке;
г) значению функции в этой точке;
д) значению тангенса производной функции в этой точке.



3.4. На рисунке 3.1 изображен график функции $y = f(x)$. Тогда производная $f'(x)$ это ...

Рисунок 3.1

а) TK/MK; б) NK/MK; в) NK; г) MK/TK; д) MN/MK; е) MN.

3.5. На рисунке 3.2 изображен график функции $y = f(x)$. Найдите значение $f'(1,5)$.

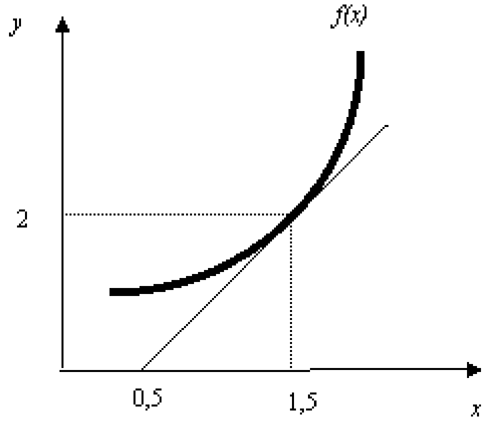


Рисунок 3.2

3.6. Укажите функции, для которых существует конечная производная в каждой точке числовой оси:

а) $y = \ln x$; б) $y = |\sin x|$; в) $y = x^3$; г) $y = 3^x$; д) $y = \sqrt[3]{x}$.

3.7. Укажите ВСЕ верные утверждения: если функция дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке …

а) функция не определена;

б) можно провести касательную к графику функции;

в) нельзя провести касательную к графику функции;

г) функция непрерывна;

д) функция имеет экстремум.

3.8. Дифференциал функции равен

а) отношению приращения функции к приращению аргумента;

б) произведению приращения функции на приращение аргумента;

в) произведению производной на приращение аргумента;

г) приращению функции;

д) приращению аргумента.

3.9. Дифференциал постоянной равен…

а) этой постоянной;

б) произведению данной постоянной на величину Δx;

в) бесконечно большой величине;

г) нулю;

д) невозможно определить.

3.10. На рисунке 3.3 изображен график функции $y = f(x)$. Какой отрезок на этом рисунке соответствует дифференциалу dy?

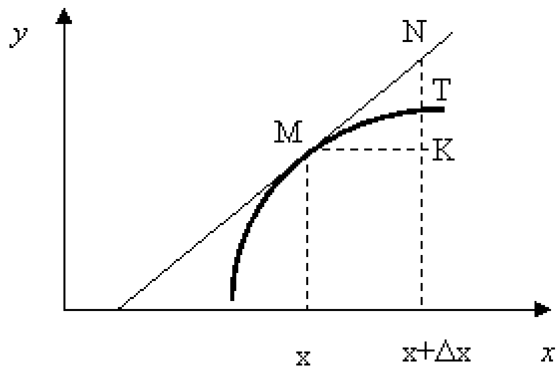


Рисунок 3.3

а) TK; б) NK; в) NT; г) MK; д) MN; е) другой ответ.

3.11. Какое из следующих утверждений верно для любой линейной функции?

а) дифференциал функции равен приращению функции;

б) дифференциал функции равен приращению аргумента;
в) дифференциал функции – это постоянная величина;
г) дифференциал функции равен производной этой функции.
3.12. Какое из следующих утверждений верно для нелинейной функции?
а) дифференциал функции равен производной этой функции;
б) дифференциал функции равен приращению аргумента;
в) дифференциал функции равен части приращения функции;
г) дифференциал функции – это постоянная величина.
3.13. Если функция $y(x)$ непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$ и $y(a) = y(b)$, то на $(a;b)$ можно найти хотя бы одну точку, в которой
а) функция не определена;
б) производная функции не существует;
в) нельзя провести касательную к графику функции;
г) производная функции обращается в ноль.

4. Исследование функций

1. Функция $y = x^3 + x$ … а) возрастает на $(-\infty; 0)$, убывает на $(0;+\infty)$; б) убывает на $(-\infty; 0)$, возрастает на $(0; +\infty)$; в) всюду убывает; г) всюду возрастает; д) другой ответ.

2. Функция $y = \dfrac{1}{x^3} - 3x$ убывает на …

а) $(3; +\infty)$; б) $(0; 1/3)$; в) $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$; д) нигде; е) другой ответ.

3. Сколько точек перегиба имеет функция $y = x^4 + 4x$?
а) ни одной; б) одну; в) две; г) три; д) больше трех.

4. Какой из графиков на рисунке 1 соответствует функции $y = f(x)$, удовлетворяющей условиям
$f'(x) < 0$; $f''(x) > 0$?

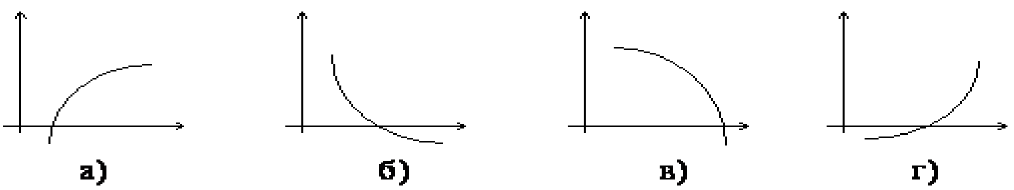


Рис. 1

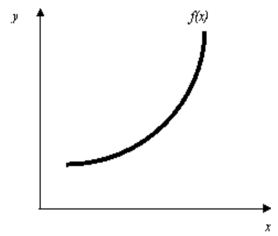


Рис. 2

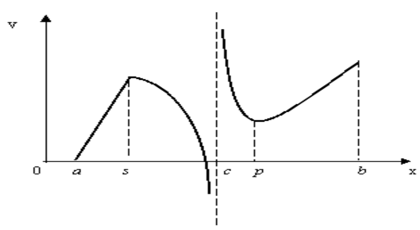


Рис.3

5. Какому условию удовлетворяет функция, график которой изображен на рисунке 2?
а) $f'(x) > 0$ и $f''(x) > 0$; б) $f'(x) > 0$ и $f''(x) < 0$; в) $f'(x) < 0$ и $f''(x) > 0$; г) $f'(x) < 0$ и $f''(x) < 0$
.

6. Укажите точки экстремума непрерывной на всей числовой прямой функции $y(x)$, если
$y' = (x+1)^2(x - 2)$:
а) $x = 2$ – точка max; б) $x = 2$ – точка min; в) $x = -1$ – точка max; г) $x = -1$ – точка min;
д) точек экстремума нет.

7. а) укажите точки на $(a; b)$, в которых функция, изображенная на рисунке 3, не дифференцируема;
б) укажите точки, в которых функция, изображенная на рисунке 3, имеет максимум;
в) Укажите точки на $[a; b]$, в которых функция, изображенная на рисунке 3, принимает наименьшее значение;
г) укажите точки на $(a; b)$ в которых производная функции, изображенной на рисунке 3, обращается в ноль.

8. Для дифференцируемой функции $f(x)$ из приведенных условий выберите достаточное условие убывания:
а) $f'(x) > 0$; б) $f'(x) < 0$; в) $f''(x) > 0$; г) $f''(x) < 0$; д) $f'(x) = 0$; е) $f''(x) = 0$.

9. Для дифференцируемой функции $f(x)$ из приведенных условий выберите достаточное условие выпуклости (выпуклости вверх):
а) $f'(x) > 0$; б) $f'(x) < 0$; в) $f''(x) > 0$; г) $f''(x) < 0$; д) $f'(x) = 0$; е) $f''(x) = 0$.

10. Для дифференцируемой функции $f(x)$ из приведенных условий выберите необходимое условие точки перегиба: а) $f'(x_0) > 0$; б) $f'(x_0) < 0$; в) $f''(x_0) > 0$; г) $f''(x_0) < 0$;
д) $f'(x_0) = 0$; е) $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует.

11. Найти $f'(-1)$, если $f(x) = x(x + 1)(x + 2)\cdot\ldots\cdot(x + 10)$.
а) 18; б) –18; в) 9!; г) –9!; д) 0.

5. Неопределенный интеграл и его свойства

1. Среди перечисленных функций укажите все, которые являются первообразными для функции $y = \dfrac{2}{\cos^2 2x}$:
а) $\mathrm{tg}\, 2x$; б) $\mathrm{ctg}\, 2x$; в) $-\mathrm{tg}\, 2x$; г) $-\mathrm{ctg}\, 2x$; д) $2\mathrm{tg}\, 2x$; е) $2\mathrm{ctg}\, 2x$; ж) $\mathrm{tg}\, 2x + 2$; з) $2 - \mathrm{ctg}\, 2x$.

2. Среди перечисленных функций укажите все, которые являются первообразными для функции $y = \ln x$:
а) $1/x$; б) $x\ln x - x$; в) $x\ln x + x$; г) $x\ln x + 3$; д) $2 + x\ln x - x$; е) $(1/x) + C$.

3. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $y = \int 2f(3x)dx$ равен:
а) $2F(3x)+C$; б) $6F(3x)+C$; в) $(2/3)F(3x)+C$; г) $(3/2)F(3x)+C$; д) $F(6x)+C$.

4. Среди перечисленных интегралов укажите все, которые вычисляются с помощью формулы интегрирования по частям:
а) $y = \int \cos^3 x dx$; б) $y = \int x\cos x dx$; в) $y = \int x\cos x^2 dx$; г) $y = \int xe^x dx$; д) $y = \int xe^{x^2} dx$;
е) $y = \int x\ln x dx$; ж) $y = \int \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

5. Среди перечисленных интегралов укажите все, которые вычисляются методом «внесения под знак дифференциала»:
а) $y = \int \cos^3 x dx$; б) $y = \int x\cos x dx$; в) $y = \int x\cos x^2 dx$; г) $y = \int xe^x dx$; д) $y = \int xe^{x^2} dx$;

е) $y=\int x\ln x dx$; ж) $y=\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

6. К какому виду преобразуется интеграл $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x+6}}$ после подстановки $x + 6 = t^2$?

а) $\int \frac{2dt}{t^2+t}$; б) $\int \frac{2t}{t^2+t-6}dt$; в) $\int \frac{2dt}{t^2+t+6}$; г) $\int \frac{2dt}{t^2+6}$.

7. Если $f(x)$ – первообразная для $g(x)$, то $\int f'(x)g'(x)dx$ равен

а) $f(x)g(x)+C$; б) $f^2(x)+C$; в) $(1/2)g^2(x)+C$; г) $g^2(x)+C$; д) 0 .

6. Определенный интеграл

1. Среди перечисленных функций укажите все, которые являются первообразными для функции $y=\frac{2}{\cos^2 2x}$:

а) tg $2x$; б) ctg $2x$; в) – tg $2x$; г) – ctg $2x$; д) 2tg $2x$; е) 2ctg $2x$; ж) tg $2x$ + 2 ; з) 2 – ctg $2x$.

2. Среди перечисленных функций укажите все, которые являются первообразными для функции $y = \ln x$:

а) $1/x$; б) $x\ln x - x$; в) $x\ln x + x$; г) $x\ln x + 3$; д) $2 + x\ln x - x$; е) $(1/x) + C$.

3. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $y=\int 2f(3x)dx$ равен:

а) $2F(3x)+C$; б) $6F(3x)+C$; в) $(2/3)F(3x)+C$; г) $(3/2)F(3x)+C$; д) $F(6x)+C$.

4. Среди перечисленных интегралов укажите все, которые вычисляются с помощью формулы интегрирования по частям:

а) $y=\int \cos^3 x dx$; б) $y=\int x\cos x dx$; в) $y=\int x\cos x^2 dx$; г) $y=\int xe^x dx$; д) $y=\int xe^{x^2}dx$;

е) $y=\int x\ln x dx$; ж) $y=\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

5. Среди перечисленных интегралов укажите все, которые вычисляются методом «внесения под знак дифференциала»:

а) $y=\int \cos^3 x dx$; б) $y=\int x\cos x dx$; в) $y=\int x\cos x^2 dx$; г) $y=\int xe^x dx$; д) $y=\int xe^{x^2}dx$;

е) $y=\int x\ln x dx$; ж) $y=\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

6. К какому виду преобразуется интеграл $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x+6}}$ после подстановки $x + 6 = t^2$?

а) $\int \frac{2dt}{t^2+t}$; б) $\int \frac{2t}{t^2+t-6}dt$; в) $\int \frac{2dt}{t^2+t+6}$; г) $\int \frac{2dt}{t^2+6}$.

7. Если $f(x)$ – первообразная для $g(x)$, то $\int f'(x)g'(x)dx$ равен

а) $f(x)g(x)+C$; б) $f^2(x)+C$; в) $(1/2)g^2(x)+C$; г) $g^2(x)+C$; д) 0 .

8. Зная, что $\int_0^2 f(x)\,dx = 3$, вычислить $\int_0^2 (1-2f(x))dx$.

9. Зная, что $\int\limits_2^4 f(x)\,dx = 3, \int\limits_2^1 f(x)\,dx = 1$, вычислить $\int\limits_1^4 f(x)\,dx$.

10. Зная, что $\int\limits_0^2 f(x)\,dx = 3$ и $f(x)$ – четная, вычислить $\int\limits_{-2}^0 f(x)\,dx = 3$.

11. Вычислить 1) $\int\limits_1^2 \frac{1-x^2}{x^2}\,dx$; 2) $\int\limits_0^5 (2 - \frac{1}{\sqrt{x+4}})\,dx$.

12. Вычислить $\int\limits_{-1}^1 x\cos x\,dx$. **13.*** Вычислить $\int\limits_{-4}^4 x\sqrt{16-x^2}\,dx$.

14.* Вычислить $\int\limits_{-1}^0 f(x)\,dx$, если $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & при\; x \in [-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ -x, & при\; x \in [-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0] \end{cases}$.

а) π ; б) –π ; в) π/2 ; г) –π/2 ; д) π/8 ; е) –π/8 ; ж) другой ответ.

15. Найти $\Phi'(x)$, если $\Phi(x) = \int\limits_0^x \sin(t^2)\,dt$.

а) $2x\sin(x^2)$; б) $2x\cos(x^2)$; в) $\sin(x^2)$; г) $\cos(x^2)$; д) $\sin(x^2)dx$; е) $\cos(x^2) - 1$.

16. Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из них имеет наибольшее значение:

а) $\int\limits_{1/2}^1 \sin x\,dx$; б) $\int\limits_{1/2}^1 \lg x\,dx$; в) $\int\limits_{1/2}^1 x^2\,dx$; г) $\int\limits_{1/2}^1 x\,dx$.

17. Если на [1; 4] $2 \le f(x) \le 3$, то выполняется неравенство а) $6 \le \int\limits_1^4 f(x)\,dx \le 9$;

б) $2 \le \int\limits_1^4 f(x)\,dx \le 3$; в) $8 \le \int\limits_1^4 f(x)\,dx \le 12$; г) $0 \le \int\limits_1^4 f(x)\,dx \le 12$; д) $10 \le \int\limits_1^4 f(x)\,dx \le 15$; е)другое

18. Функция $f(x)$ непрерывна на [1;4] и на этом отрезке ее наибольшее значение $f_{наиб} = 5$ и наименьшее значение $f_{наим} = 2$. Из предложенных неравенств выберите все верные:

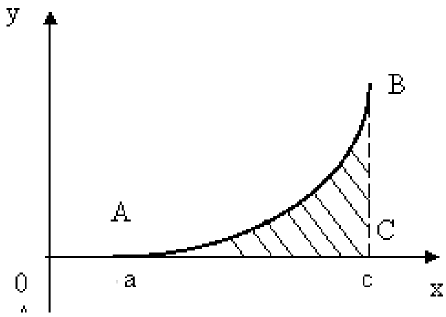
а) $\int\limits_1^4 f(x)\,dx \le 15$; б) $\int\limits_1^4 f(x)\,dx \ge 6$; в) $\int\limits_1^4 f(x)\,dx \le 5$; г) $\int\limits_1^4 f(x)\,dx \ge 20$; д) $\int\limits_1^4 f(x)\,dx \ge 0$.

19. Если на рисунке 1 дуга АВ – это график функции $y = f(x)$, то площадь заштрихованной фигуры вычисляется по формуле а) $\int\limits_a^c f(x)\,dx$; б) $\pi\int\limits_a^c (f(x))^2\,dx$; в) $\int\limits_a^c \sqrt{1+(f'_x)^2}\,dx$;

г) $\int\limits_{t_a}^{t_c} f(t)\,g'(t)dt$; д) $\pi\int\limits_{t_a}^{t_c} (f(t))^2\,g'(t)dt$; е) $\int\limits_{t_a}^{t_c} \sqrt{(f'_t)^2 + (g'_t)^2}\,dt$.

20. Если на рисунке 1 дуга АВ – это график параметрически заданной функции $y = f(t)$; $x = g(t)$, $t \in [t_a; t_c]$, то длина этой дуги вычисляется по формуле

а) $\int\limits_a^c f(x)\,dx$; б) $\pi\int\limits_a^c (f(x))^2\,dx$; в) $\int\limits_a^c \sqrt{1+(f'_x)^2}\,dx$; г) $\int\limits_{t_a}^{t_c} f(t)\,g'(t)dt$; д) $\pi\int\limits_{t_a}^{t_c} (f(t))^2\,g'(t)dt$;



e) $\int\limits_{t_a}^{t_c} \sqrt{(f_t^{/})^2 + (g_t^{/})^2}\, dt$.

3.4. Вопросы к зачету

Вопросы к зачету

1. Числовая последовательность и ее предел.

2. Понятие функции. Основные элементарные функции. Классификация функций.

3. Предел функции, его геометрическая интерпретация. Бесконечно - малые и бесконечно - большие функции.

4. Теорема о пределах. Первый и второй замечательные пределы.

5. Непрерывность функции. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва. Примеры.

6. Производная. Определение, правила дифференцирования. Производная сложной функции. Формулы дифференцирования основных элементарных функций.

7. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной и нормали.

8. Понятие дифференциала, свойства, геометрический смысл. Применение дифференциала для приближенных вычислений.

9. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя.

Задачи к зачету

1. Укажите область определения и найдите корни (нули) функций:
1) $y = \ln(x + 2)$; 2) $y = 27x - x^3$; 3) $y = \cos 2x$.

2. Определите промежутки знакопостоянства функций: 1) $y = \ln\frac{x-1}{x+2}$; 2) $y = \lg|x|$.

3. Укажите, какие из нижеприведенных функций являются: а) четными; б) нечетными ?
1) $y = 3x\sin x + 2\cos x$; 2) $y = \log_3 \frac{2-x}{x+2}$.

4. Найти периоды функций: 1) $y = 15tg(\frac{7}{10}x + \frac{\pi}{12})$; 2) $y = \cos^2 x$.

5. Укажите вид функции, обратной данной (по образцу: $y = 2x + 1$, $x = 2y + 1$, $y = \frac{x-1}{2}$):

$$1)\ y = 2^x;\quad 2)\ y = \frac{x-1}{x+2}.$$

6. Доказать, что при $n \to \infty$ последовательность $\left\{\frac{2n+1}{3n-1}\right\}$ имеет пределом число $\frac{2}{3}$.

7. Вычислить пределы: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{ctgx}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-1}{x}$.

8. Исследовать функцию на непрерывность

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3}, при\ x\neq 3\\ 2, при\ x=3\end{cases}.$$

9. Найти y′. а) $y = 3x^5 + 2x^2 + 5x + 1$; б) $y = -\dfrac{1}{3}x^2\sin 5x$.

10. Составить уравнение касательной к кривой $y = 3x^2 - 2x$ в точке $x = 1$.

11. Провести исследование функции и построить ее график функции $y=\dfrac{1}{x^2-1}$.

1. Укажите область определения и найдите корни (нули) функций:
1) $y = \ln(x + 2)$; 2) $y = 27x - x^3$; 3) $y = \cos 2x$.

2. Определите промежутки знакопостоянства функций: 1) $y = \ln\dfrac{x-1}{x+2}$; 2) $y = \lg|x|$.

3. Укажите, какие из нижеприведенных функций являются: а) четными; б) нечетными?
1) $y = 3x\sin x + 2\cos x$; 2) $y = \log_3\dfrac{2-x}{x+2}$.

4. Найти периоды функций: 1) $y=15tg(\dfrac{7}{10}x+\dfrac{\pi}{12})$; 2) $y = \cos^2 x$.

5. Укажите вид функции, обратной данной (по образцу: y = 2x + 1, x = 2y + 1, $y=\dfrac{x-1}{2}$):

$$1)\ y = 2^x;\ 2)\ y=\frac{x-1}{x+2}.$$

6. Доказать, что при $n\to\infty$ последовательность $\left\{\dfrac{2n+1}{3n-1}\right\}$ имеет пределом число $\dfrac{2}{3}$.

7. Вычислить пределы: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{ctgx}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^{-3x}-1}{x}$.

8. Исследовать функцию на непрерывность

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3}, при\ x\neq 3\\ 2, при\ x=3\end{cases}.$$

9. Найти y′. а) $y = 3x^5 + 2x^2 + 5x + 1$; б) $y = -\dfrac{1}{3}x^2\sin 5x$.

10. Составить уравнение касательной к кривой $y = 3x^2 - 2x$ в точке $x = 1$.

3.5. Вопросы к экзамену

Вопросы к экзамену

1. Признак постоянства, возрастания и убывания функции в точке и на промежутке. Примеры. Назовите место темы в школьном курсе математики.
2. Максимум и минимум. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия максимума и минимума. Примеры. Назовите место темы в школьном курсе математики.
3. Нахождение наибольших и наименьших значений функции. Примеры. Назовите место темы в школьном курсе математики.

4. Выпуклые функции. Точки перегиба. Примеры. Назовите место темы в школьном курсе математики.
5. Асимптоты. Примеры. Назовите место темы в школьном курсе математики.
6. Применение дифференциального исчисления к построению графиков функций. Схема построения графика функции. Примеры. Назовите место темы в школьном курсе математики.
7. Первообразная функция. Первообразные для простейших функций. Назовите место темы в школьном курсе математики.
8. Неопределенный интеграл, его определение, свойства. Таблица основных интегралов Примеры. Назовите место темы в школьном курсе математики.
9. Основные методы интегрирования неопределенного интеграла: непосредственное интегрирование, интегрирования по частям, замена переменной. Примеры. Назовите место темы в школьном курсе математики.
10. Интегрирование простейших рациональных функций. Примеры. Назовите место темы в школьном курсе математики.
11. Интегрирование дробно-рациональных функций. Примеры. Назовите место темы в школьном курсе математики.
12. Определенный интеграл, его свойства. Теорема о среднем для определенного интеграла. Назовите место темы в школьном курсе математики.
13. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Существование первообразной функции. Формула Ньютона-Лейбница. Примеры. Назовите место темы в школьном курсе математики.
14. Вычисление определенного интеграла. Интегрирование по частям и заменой переменной. Примеры. Назовите место темы в школьном курсе математики.
15. Геометрический смысл определенного интеграла. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых и полярных координатах. Примеры. Назовите место темы в школьном курсе математики.
16. Вычисление объема тела вращения. Примеры. Формулы длин дуг плоских кривых. Примеры. Назовите место темы в школьном курсе математики.
17. Приложения определенного интеграла в физике. Назовите место темы в школьном курсе математики.

Задачи к экзамену

1. Среди перечисленных функций укажите все, которые являются первообразными для функции $y=\dfrac{2}{\cos^2 2x}$:
а) tg $2x$; б) ctg $2x$; в) – tg $2x$; г) – ctg $2x$; д) 2tg $2x$; е) 2ctg $2x$; ж) tg $2x$ + 2 ; з) 2 – ctg $2x$.

2. Среди перечисленных функций укажите все, которые являются первообразными для функции $y = \ln x$:
а) $1/x$; б) $x\ln x - x$; в) $x\ln x + x$; г) $x\ln x + 3$; д) $2 + x\ln x - x$; е) $(1/x) + C$.

3. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $y=\int 2f(3x)dx$ равен:
а) $2F(3x)+C$; б) $6F(3x)+C$; в) $(2/3)F(3x)+C$; г) $(3/2)F(3x)+C$; д) $F(6x)+C$.

4. Среди перечисленных интегралов укажите все, которые вычисляются с помощью формулы интегрирования по частям:
а) $y=\int \cos^3 x dx$; б) $y=\int x\cos x dx$; в) $y=\int x\cos x^2 dx$; г) $y=\int xe^x dx$; д) $y=\int xe^{x^2} dx$;

е) $y=\int x\ln x dx$; ж) $y=\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

5. Среди перечисленных интегралов укажите все, которые вычисляются методом «внесения под знак дифференциала»:
а) $y=\int \cos^3 x dx$; б) $y=\int x\cos x dx$; в) $y=\int x\cos x^2 dx$; г) $y=\int xe^x dx$; д) $y=\int xe^{x^2} dx$;
е) $y=\int x\ln x dx$; ж) $y=\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

6. К какому виду преобразуется интеграл $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x+6}}$ после подстановки $x + 6 = t^2$?

а) $\int \frac{2dt}{t^2+t}$; б) $\int \frac{2t}{t^2+t-6}dt$; в) $\int \frac{2dt}{t^2+t+6}$; г) $\int \frac{2dt}{t^2+6}$.

7. Если $f(x)$ – первообразная для $g(x)$, то $\int f'(x)g'(x)dx$ равен
а) $f(x)g(x)+C$; б) $f^2(x)+C$; в) $(1/2)g^2(x)+C$; г) $g^2(x)+C$; д) 0 .

8. Зная, что $\int_0^2 f(x)\,dx = 3$, вычислить $\int_0^2 (1-2f(x))dx$.

9. Зная, что $\int_2^4 f(x)\,dx=3$, $\int_2^1 f(x)\,dx=1$, вычислить $\int_1^4 f(x)\,dx$.

10. Зная, что $\int_0^2 f(x)\,dx=3$ и $f(x)$ – четная, вычислить $\int_{-2}^0 f(x)\,dx=3$.

11. Вычислить 1) $\int_1^2 \frac{1-x^2}{x^2}\,dx$; 2) $\int_0^5 (2-\frac{1}{\sqrt{x+4}})\,dx$.

12. Вычислить $\int_{-1}^1 x\cos x\,dx$. **13.*** Вычислить $\int_{-4}^4 x\sqrt{16-x^2}\,dx$.

14.* Вычислить $\int_{-1}^0 f(x)\,dx$, если $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & при\ x\in[-1;-\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ -x, & при\ x\in[-\frac{1}{\sqrt{2}};0]\end{cases}$.

а) π ; б) –π ; в) π/2 ; г) –π/2 ; д) π/8 ; е) –π/8 ; ж) другой ответ.

15. Найти $\Phi'(x)$, если $\Phi(x)=\int_0^x \sin(t^2)\,dt$.

а) $2x\sin(x^2)$; б) $2x\cos(x^2)$; в) $\sin(x^2)$; г) $\cos(x^2)$; д) $\sin(x^2)dx$; е) $\cos(x^2) - 1$.

16. Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из них имеет наибольшее значение:

а) $\int_{1/2}^1 \sin x\,dx$; б) $\int_{1/2}^1 \lg x\,dx$; в) $\int_{1/2}^1 x^2\,dx$; г) $\int_{1/2}^1 x\,dx$.

17. Если на [1; 4] $2 \le f(x) \le 3$, то выполняется неравенство а) $6 \le \int_1^4 f(x)\,dx \le 9$;

б) $2 \le \int_1^4 f(x)\,dx \le 3$; в) $8 \le \int_1^4 f(x)\,dx \le 12$; г) $0 \le \int_1^4 f(x)\,dx \le 12$; д) $10 \le \int_1^4 f(x)\,dx \le 15$; е)другое

18. Функция $f(x)$ непрерывна на [1;4] и на этом отрезке ее наибольшее значение $f_{наиб} = 5$ и наименьшее значение $f_{наим} = 2$. Из предложенных неравенств выберите все верные:

а) $\int\limits_1^4 f(x)\,dx \le 15$; б) $\int\limits_1^4 f(x)\,dx \ge 6$; в) $\int\limits_1^4 f(x)\,dx \le 5$; г) $\int\limits_1^4 f(x)\,dx \ge 20$; д) $\int\limits_1^4 f(x)\,dx \ge 0$.

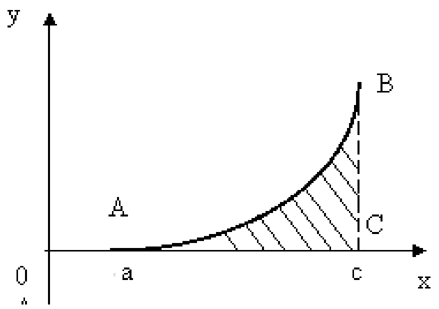
19. Если на рисунке 1 дуга АВ – это график функции $y = f(x)$, то площадь заштрихованной фигуры вычисляется по формуле а) $\int\limits_a^c f(x)\,dx$; б) $\pi\int\limits_a^c (f(x))^2\,dx$; в) $\int\limits_a^c \sqrt{1+(f_x^/)^2}\,dx$;

г) $\int\limits_{t_a}^{t_c} f(t)\,g'(t)dt$; д) $\pi\int\limits_{t_a}^{t_c} (f(t))^2\,g'(t)dt$; е) $\int\limits_{t_a}^{t_c} \sqrt{(f_t^/)^2+(g_t^/)^2}\,dt$.

20. Если на рисунке 1 дуга АВ – это график параметрически заданной функции $y = f(t)$; $x = g(t)$, $t \in [t_a; t_c]$, то длина этой дуги вычисляется по формуле

а) $\int\limits_a^c f(x)\,dx$; б) $\pi\int\limits_a^c (f(x))^2\,dx$; в) $\int\limits_a^c \sqrt{1+(f_x^/)^2}\,dx$; г) $\int\limits_{t_a}^{t_c} f(t)\,g'(t)dt$; д) $\pi\int\limits_{t_a}^{t_c} (f(t))^2\,g'(t)dt$;

е) $\int\limits_{t_a}^{t_c} \sqrt{(f_t^/)^2+(g_t^/)^2}\,dt$.



3.5. Контрольная работа

Контрольная работа в 4 семестре представляет собой проведение методического анализа содержательной части школьного предмета «Алгебра и начала анализа» и подбор школьных заданий различного уровня сложности (базовый, повышенный, творческий) по одной из понятийных линий математического анализа.

Выполнение и зачет по контрольной работе является допуском к экзамену.

По результатам оценки контрольной работы студенту ставится оценка «зачтено».

Содержание контрольной работы

1. Сделайте анализ школьных учебников по предмету «Алгебра и начала анализа»: не менее 5 авторских линеек, (например, линейки А.Г. Мордковича, Ю.Н. Макарычева, А.Г. Мерзляка, А.Н. Колмогорова и др.), рекомендованных для использования в школе, не старше 5 лет, по одной из категорий (тем) предметной области «Математический анализ» (по вариантам).
2. Отчет структурируйте: авторы, класс, тип учебника (общеобразовательный или профильный), тема, основные понятия, уровень сложности материала, наличие примеров и задач различного уровня сложности с примерами, особенности.
3. Сделайте подбор примеров и задач по уровням сложности: не менее 20 примеров и не менее 10 задач на каждый уровень (базовый, повышенный, творческий). Подборку сделать для конкретного класса.

Вариант	Понятийная линия (тема) математического анализа
1.	Признак постоянства, возрастания и убывания функции в точке и на промежутке.
2.	Максимум и минимум. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия максимума и минимума.
3.	Нахождение наибольших и наименьших значений функции.
4.	Выпуклые функции. Точки перегиба.
5.	Асимптоты.
6.	Применение дифференциального исчисления к построению графиков функций. Схема построения графика функции.
7.	Первообразная функция. Первообразные для простейших функций.
8.	Неопределенный интеграл, его определение, свойства. Таблица основных интегралов
9.	Основные методы интегрирования неопределенного интеграла: непосредственное интегрирование, интегрирования по частям, замена переменной.
10.	Интегрирование простейших рациональных функций.
11.	Интегрирование дробно-рациональных функций.
12.	Определенный интеграл, его свойства. Теорема о среднем для определенного интеграла.
13.	Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Существование первообразной функции. Формула Ньютона-Лейбница.
14.	Вычисление определенного интеграла. Интегрирование по частям и заменой переменной.
15.	Геометрический смысл определенного интеграла. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых и полярных координатах.
16.	Вычисление объема тела вращения. Примеры. Формулы длин дуг плоских кривых.
17.	Приложения определенного интеграла в физике.
18.	Числовые ряды. Признаки сходимости рядов. Числовой ряд и его частичные суммы. Сходящиеся ряды.
19.	Функции нескольких переменных. График функции двух переменных.
20.	Кратные интегралы и их применение. Квадрируемые фигуры и их площади. Понятие двойного интеграла. Кубируемые тела и их объемы. Понятие тройного интеграла.