МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Тобольский педагогический институт им. Д.И.Менделеева (филиал)
Тюменского государственного университета

УТВЕРЖДАЮ
Директор
__________________ Шилов С.П

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ГЕОМЕТРИЯ

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Профили: математика; информатика
Форма обучения очная

1. Паспорт оценочных материалов по дисциплине

1.1. Перечень компетенций

Код и наименование компетенции	Компонент (знаниевый/функциональный)
ОК-3 способность использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве	Знает основные понятия и доказательства фактов основных разделов курса аналитической геометрии (понятие вектора, линейные операции с векторами, скалярное, векторное и смешанное произведение векторов; уравнения прямой линии и плоскости; линии второго порядка: эллипс, гипербола и парабола; аффинную классификацию линий второго порядка; поверхности второго порядка: эллипсоид; гиперболоид; параболоид; цилиндр; конические поверхности; прямолинейные образующие).
	Умеет применять теоретические знания к решению типовых геометрических задач (выполнять действия с векторами в координатах, находить уравнения прямых и плоскостей по определяющим их точкам или векторам, применять метод координат при решении геометрических задач, находить параметры кривых второго порядка по их каноническим и общим уравнениям, приводить общее уравнение кривой второго порядка к каноническому виду).
ПК-4 способность использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемого учебного предмета	Знает области приложения знаний по геометрии в содержании школьного курса математики
	Может составить алгоритм решения задачи по геометрии для использования в учебном процессе и пояснить решение типовых школьных задач

1.2. Паспорт оценочных средств по дисциплине

№ п/п	Темы дисциплины в ходе текущего контроля, вид промежуточной аттестации	Код компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства (количество вариантов, заданий и т.п.)
3 семестр			
1	Линейная зависимость векторов и ее свойства. Базис на плоскости и в пространстве. Разложение вектора по векторам базиса.	ОК-3, ПК-4	Коллоквиум 1 Практические работы Самостоятельная работа 1. Тест 1.
2	Коллинеарность и компланарность векторов. Линейные операции в координатах.	ОК-3, ПК-4	Коллоквиум 1 Практические работы Самостоятельная работа 1.
3	Скалярное произведение векторов.	ОК-3, ПК-4	Коллоквиум 1 Практические работы Самостоятельная работа 1.
4	Уравнение прямой в аффинной системе координат.	ОК-3, ПК-4	Коллоквиум 1 Практические работы Самостоятельная работа 1.
5	Уравнение прямой в прямоугольной декартовой системе координат.	ОК-3, ПК-4	Коллоквиум 1 Практические работы

№ п/п	Темы дисциплины в ходе текущего контроля, вид промежуточной аттестации	Код компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства (количество вариантов, заданий и т.п.)
			Самостоятельная работа 1.
6	Угол между прямыми на плоскости.	ОК-3, ПК-4	Коллоквиум 1 Практические работы Самостоятельная работа 2.
7	Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой	ОК-3, ПК-4	Коллоквиум 1 Практические работы Самостоятельная работа 2.
	Зачет	ОК-3	Контрольная работа 1. Вопросы к зачету (теоретический и задача)
4 семестр			
1	Ориентация пространства. Векторное произведение векторов и его свойства	ОК-3, ПК-4	Коллоквиум 2 Практические работы Тест 2.
2	Смешанное произведение векторов и его свойства.	ОК-3, ПК-4	Коллоквиум 2 Практические работы Самостоятельная работа 3.
3	Различные виды уравнений плоскости в пространстве. Их использование при решении геометрических задач.	ОК-3, ПК-4	Коллоквиум 2 Практические работы Самостоятельная работа 4.
4	Взаимное расположение двух плоскостей. Угол между плоскостями	ОК-3, ПК-4	Коллоквиум 2 Практические работы Самостоятельная работа 4.
5	Расстояние от точки до плоскости в пространстве	ОК-3, ПК-4	Коллоквиум 2 Практические работы
6	Различные способы задания прямой в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Угол между прямыми.	ОК-3, ПК-4	Коллоквиум 2 Практические работы Самостоятельная работа 5.
7	Расстояние от точки до прямой и между двумя скрещивающимися прямыми в пространстве	ОК-3, ПК-4	Коллоквиум 2 Практические работы
8	Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью.	ОК-3, ПК-4	Коллоквиум 2 Практические работы Самостоятельная работа 6. Контрольная работа 2.
9	Эллипс и его свойства.	ОК-3, ПК-4	Коллоквиум 3 Практические работы Самостоятельная работа 7.
10	Парабола и ее свойства.	ОК-3, ПК-4	Коллоквиум 3 Практические работы Самостоятельная работа 7.
11	Гипербола и ее свойства.	ОК-3, ПК-4	Коллоквиум 3 Практические работы Самостоятельная работа 7.
	Экзамен	ОК-3, ПК-4	Контрольная работа 3. Вопросы к экзамену (теоретический и задача)

1.3. Показатели, критерии и шкала оценивания сформированности компетенций

Код и наименование компетенции	Компонент (знаниевый/функциональный)	Оценочные материалы	Критерии оценивания
ОК-3 способность использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве	Знает основные понятия и доказательства фактов основных разделов курса аналитической геометрии (понятие вектора, линейные операции с векторами, скалярное, векторное и смешанное произведение векторов; уравнения прямой линии и плоскости; линии второго порядка: эллипс, гипербола и парабола; аффинную классификацию линий второго порядка; поверхности второго порядка: эллипсоид; гиперболоид; параболоид; цилиндр; конические поверхности; прямолинейные образующие).	Контрольные вопросы Теоретические вопросы к зачету (экзамену)	*Пороговый уровень:* может выполнять работы под контролем преподавателя. *Базовый уровень:* может выполнять работы самостоятельно. *Повышенный уровень:* готов выполнять работы в условиях учебно-воспитательного процесса с обучающимися.
	Умеет применять теоретические знания к решению типовых геометрических задач (выполнять действия с векторами в координатах, находить уравнения прямых и плоскостей по определяющим их точкам или векторам, применять метод координат при решении геометрических задач, находить параметры кривых второго порядка по их каноническим и общим уравнениям, приводить общее уравнение кривой второго порядка к каноническому виду).	Практические работы Самостоятельные работы. Практический вопрос к зачету (экзамену) (задача). Контрольные работы.	
ПК-4 способность использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемого учебного предмета	Знает области приложения знаний по геометрии в содержании школьного курса математики	Контрольные вопросы Практические работы Контрольная работа 3.	*Пороговый уровень:* может выполнять работы под контролем преподавателя. *Базовый уровень:* может выполнять работы самостоятельно. *Повышенный уровень:* готов выполнять работы в условиях учебно-воспитательного процесса с обучающимися.
	Может составить алгоритм решения задачи по геометрии для использования в учебном процессе и пояснить решение типовых школьных задач		

2. Виды и характеристика оценочных средств

Текущий контроль осуществляется в форме собеседования по вопросам к коллоквиуму, решения проверочных работ.

Оценивание результатов освоения дисциплины может осуществляться в рамках балльной системы, разработанной преподавателем и доведенной до сведения обучающихся на первом занятии

Промежуточная аттестация проходит в форме собеседования по вопросам к зачету или экзамену и решения контрольной работы.

3 семестр (зачет) – собеседование по вопросам и решение задачи;

4 семестр (экзамен) – контрольная работа и собеседование по билетам (теоретический вопрос и решение примера).

Промежуточная аттестация может быть выставлена с учетом совокупности баллов, полученных обучающимся в рамках текущего контроля.

2.1. Практические работы

Задания на практических занятиях используются для оценки умений по отдельным темам дисциплины. Отчет оценивается в баллах 0-5.

Задания представляются в виде письменной работы или файла. При необходимости сопровождается дополнительными материалами, в том числе, мультимедийными.

Содержание отчета и критерии оценки ответа доводятся до сведения обучающихся в начале занятий. Оценка объявляется непосредственно после сдачи отчета и проверки по выполненному заданию на текущем или следующем занятии.

Балл	Критерий оценивания заданий
5	Задания выполнены правильно в полном объеме. Оформление соответствует всем требованиям. Может ответить на уточняющие вопросы. Решения задачи с пояснением у доски на хорошем методическом уровне.
3-4	Задания выполнены правильно и практически полностью. Оформление в основном соответствует всем требованиям. Может ответить на некоторые уточняющие вопросы. Решения задачи с пояснением у доски.
1-2	Задания выполнены частично правильно и не полностью. Оформление соответствует отдельным требованиям. С трудом может ответить на некоторые уточняющие вопросы. Решения задачи с пояснением у доски отсутствует
0	Задания не выполнены правильно, не может ответить на вопросы. У доски не работает.

2.2. Самостоятельные и контрольные работы

Используются для оценки практических умений по решению задач, выявлению алгоритма задач и способности объяснить решение задачи, как основа для формирования профессиональных компетенций.

Отчет о выполнении заданий оценивается по 5-ти балльной системе. Критерии оценки ответа (табл.) доводятся до сведения обучающихся в начале занятий.

Балл	Критерий оценивания
"отлично"	Выполнил работу самостоятельно и без ошибок; допустил не более одного недочета; демонстрирует понимание способов и видов учебной деятельности по созданию алгоритма и программы; владеет терминологией и может прокомментировать этапы своей деятельности и полученный результат; может предложить другой способ деятельности или алгоритм выполнения задания.
"хорошо"	Выполнил работу самостоятельно и без ошибок; допустил не более двух (для простых задач) и трех (для сложных задач) недочетов; демонстрирует понимание способов и видов учебной деятельности по созданию алгоритма и программы; может прокомментировать этапы своей деятельности и полученный результат (например, дает комментарии о выполненных действиях при форматировании алгоритма ли листинга программы; затрудняется предложить другой способ деятельности или алгоритм выполнения задания.
"удовлетвори тельно"	Если студент правильно выполнил более 50% всех заданий и при этом: демонстрирует общее понимание способов и видов учебной деятельности по созданию алгоритма и программы; может прокомментировать некоторые этапы своей деятельности и полученный результат. Или при условии выполнения всей работы студент допустил: для простых задач – одну грубую ошибку или более четырех недочетов; для сложных задач – две грубые ошибки или более восьми недочетов. Сложным считается задание, которое естественным образом разбивается на несколько частей при его выполнении.
"неудовлетво рительно"	Допустил число ошибок и недочетов, превышающее норму, при которой может быть выставлена оценка «удовлетворительно»; правильно выполнил не более 10% всех заданий. Или не приступил к выполнению работы.

2.3. Коллоквиум

Коллоквиум в виде собеседования используется для проведения анализа материала лекций, самостоятельного углубления знаний, а также для самопроверки знаний студентов по отдельным вопросам и/или темам дисциплины. Ответ оценивается в баллах «2», «1» или «0». Критерии оценки ответа (табл.) доводятся до сведения обучающихся в начале занятий. Оценка объявляется в конце занятия.

Балл	Критерий оценивания
2	- показывает знание основных понятий темы, грамотно пользуется терминологией; - проявляет умение анализировать и обобщать информацию, навыки связного описания явлений и процессов; - демонстрирует умение излагать учебный материал в определенной логической последовательности; - показывает умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами; - демонстрирует сформированность и устойчивость знаний, умений и навыков; - могут быть допущены одна–две неточности при освещении второстепенных вопросов.
1	- неполно или непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения материала; - имелись затруднения или допущены ошибки в определении понятий, использовании терминологии, описании явлений и процессов, исправленные после наводящих вопросов; - выявлена недостаточная сформированность знаний, умений и навыков, студент не может применить теорию в новой ситуации.
0	- не раскрыто основное содержание учебного материала; - обнаружено незнание или непонимание большей или наиболее важной части учебного материала; - допущены ошибки в определении понятий, при использовании терминологии, в

	описании явлений и процессов, решении задач, которые не исправлены после нескольких наводящих вопросов; - не сформированы компетенции, отсутствуют соответствующие знания, умения и навыки.

2.4. Зачет

Зачет является средством проведения промежуточной аттестации в 3 семестре, проходит в форме собеседования по вопросам.

Оценка «ЗАЧТЕНО» (базовый или повышенный уровень: готов к самостоятельному выполнению работ, в том числе, в учебно-воспитательном процессе)

- Знает основные понятия и доказательства фактов основных разделов курса геометрии
- Умеет применять методы геометрии к доказательству теорем и решению задач.
- Может пояснить решение типовых задач.
- Отвечает на большинство дополнительных вопросов.

Оценка «НЕ ЗАЧТЕНО» (низкий или пороговый уровень: может выполнять работы только под контролем преподавателя)

- Не знает большинство понятий понятия и доказательства фактов основных разделов курса геометрии.
- Не умеет применять методы геометрии к доказательству теорем и решению задач.
- С трудом может пояснить решение типовых задач.
- Затрудняется отвечать на дополнительные вопросы.

2.5. Экзамен

Экзамен является средством проведения промежуточной аттестации во 2 и 4 семестре, проходит в форме собеседования по вопросам.

Результаты освоения дисциплины во время экзамена оцениваются степенью полноты ответа на вопросы билета.

Оценка «отлично» (*повышенный уровень:* готов выполнять работы в условиях учебно-воспитательного процесса с обучающимися):

- Отлично знает основные понятия и доказательства фактов основных разделов курса геометрии.
- Умеет свободно применять методы геометрии к доказательству теорем и решению задач.
- Отлично знает области приложения знаний в содержании школьного курса математики
- Может доступно пояснить решение типовых школьных задач.
- Свободно отвечает на дополнительные вопросы.

Оценка «хорошо» (*базовый уровень:* может выполнять работы самостоятельно):

- Хорошо знает основные понятия и доказательства фактов основных разделов курса геометрии
- Умеет применять методы геометрии к доказательству теорем и решению задач.
- Хорошо знает области приложения знаний в содержании школьного курса математики
- Может пояснить решение типовых школьных задач.

- Отвечает на большинство дополнительных вопросов.

Оценка «удовлетворительно» (*пороговый уровень:* может выполнять работы под контролем преподавателя):

- Знает отдельные понятия и доказательства фактов основных разделов курса геометрии.
- С трудом применяет методы геометрии к решению задач.
- С трудом может назвать области приложения знаний в содержании школьного курса математики
- Не может доступно пояснить решение типовых школьных задач.
- Затрудняется отвечать на дополнительные вопросы.

Экзамен (зачет) принимается преподавателем, проводившим занятия, или читающим лекции по данной дисциплине. В случае отсутствия ведущего преподавателя зачет принимается преподавателем, назначенным распоряжением заведующего кафедрой. С разрешения заведующего кафедрой на зачете может присутствовать преподаватель кафедры, привлеченный для помощи в приеме зачета.

Во время зачета обучающиеся могут пользоваться с разрешения ведущего преподавателя соответствующими техническими и программными средствами.

Время для подготовки 60 мин – для формулировки ответа на теоретический вопрос и решение задачи. Время ответа - не более 7-10 минут. Преподавателю предоставляется право задавать обучающимся дополнительные вопросы в рамках программы дисциплины. Общее время сдачи экзамена на 1 студента – 15 минут.

Нарушение дисциплины, списывание, использование обучающимися неразрешенных печатных и рукописных материалов, мобильных телефонов, коммуникаторов, планшетных компьютеров, ноутбуков и других видов личной коммуникационной и компьютерной техники во время зачета запрещено. В случае нарушения этого требования преподаватель обязан удалить обучающегося из аудитории и проставить ему в ведомости оценку «не зачтено».

Количественная оценка «отлично», «хорошо» или «удовлетворительно», внесенная в зачетную книжку и зачетно-экзаменационную ведомость, является результатом успешного усвоения учебного материала. Результат экзамена в зачетную книжку выставляется в день проведения в присутствии самого обучающегося. Преподаватели несут персональную ответственность за своевременность и точность внесения записей о результатах промежуточной аттестации в зачетно-экзаменационную ведомость и в зачетные книжки.

Если обучающийся явился на экзамен и отказался от прохождения аттестации в связи с неподготовленностью, то в зачетно-экзаменационную ведомость ему выставляется оценка в соответствии с набранными баллами в течение семестра.

Неявка на экзамен при условии нулевой аттестации в течение семестра отмечается в зачетно-экзаменационной ведомости словами «не явился».

Обучающимся, не сдавшим экзамен в установленные сроки по уважительной причине, индивидуальные сроки проведения экзамена определяются приказом ректора Университета. Обучающиеся, имеющие академическую задолженность, сдают экзамен в сроки, определяемые Университетом. Информация о ликвидации задолженности отмечается в экзаменационном листе. Допускается с разрешения деканата и досрочная сдача экзамена с записью результатов в экзаменационный лист.

Инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья могут сдавать экзамены в сроки, установленные индивидуальным учебным планом. Инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья, имеющие нарушения опорно-двигательного аппарата, допускаются на аттестационные испытания в сопровождении ассистентов-сопровождающих.

3. Оценочные средства

3.1. Вопросы к коллоквиуму

Вопросы к коллоквиуму 1. *«Прямая на плоскости»*

1. Прямая на плоскости, заданная точкой и направляющим вектором, каноническое и параметрическое уравнение. Примеры.
2. Прямая на плоскости, заданная двумя точками и ее уравнение.
3. Уравнение прямой на плоскости в отрезках. Примеры.
4. Прямая на плоскости, заданная точкой и ортогональным вектором и ее уравнение. Примеры.
5. Прямая на плоскости, заданная точкой и угловым коэффициентом и ее уравнение. Примеры.
6. Общее уравнение прямой. Направляющий и ортогональный вектор к прямой, заданной общим уравнением. Примеры.
7. Угол между прямыми заданными направляющими и ортогональными векторами, общими уравнениями. Примеры.
8. Угол между прямыми, заданными угловыми коэффициентами. Примеры.
9. Взаимное расположение прямых, заданных общими уравнениями. Примеры.
10. Расстояние от точки до прямой. Примеры.
11. Какое место тема занимает в школьном курсе математики? Приведите примеры.

Вопросы к коллоквиуму 2. *«Векторные пространства»*

1. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов. Примеры
2. Различные уравнения плоскости в пространстве. Уравнение плоскости, заданной точкой и двумя направляющими векторами. Уравнение плоскости, заданной тремя точками. Примеры.
3. Общее уравнение плоскости и его исследование.
4. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости. Примеры.
5. Различные способы задания прямой в пространстве. Параметрическое и каноническое уравнение прямой уравнение прямой, заданной точкой и направляющим вектором. Уравнение прямой, заданной двумя точками. Примеры.
6. Прямая, заданная пересечением плоскостей. Примеры.
7. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Угол между прямыми, заданными направляющими векторами. Примеры.
8. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Примеры.
9. Какое место тема занимает в школьном курсе математики? Приведите примеры.

Вопросы к коллоквиуму 3. *«Линии и поверхности II-го порядка»*

1. Эллипс. Определение эллипса, вывод уравнения, исследование формы эллипса по его уравнению. Эксцентриситет, директрисы и директориальное свойство эллипса. Касательная к эллипсу. Примеры.
2. Гипербола. Определение гиперболы, вывод уравнения, исследование формы гиперболы по ее уравнению. Асимптоты, эксцентриситет, директрисы и директориальное свойство гиперболы. Касательная к гиперболе. Примеры.

3. Парабола. Определение параболы, вывод уравнения, исследование формы параболы по ее уравнению. Различные виды канонического уравнения параболы. Касательная к параболе. Примеры.
4. Общее уравнение линии второго порядка в прямоугольной декартовой системе координат. 9 канонических уравнений линий второго порядка.
5. Какое место тема занимает в школьном курсе математики? Приведите примеры.

3.2. Контрольные работы

3.2.1. Контрольная работа 1

Вариант 1

1. Даны 3 вершины треугольника A(1,–1), B(–3,3), C(3,4). Вычислите какую-нибудь тригонометрическую функцию угла ABC.

2. Даны 3 вершины треугольника A(2, 1), B(–2, 1), C(1, 6). Найдите длину вектора высоты CH – высоту и площадь треугольника ABC.

3. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку A(5, 3) перпендикулярно прямой $3\times x - 2\times y + 4 = 0$.

4. Даны три вершины треугольника A(2,3), B(4,1), C(5,2). Составьте уравнение:

а) медианы, проведённой из точки C.

в) высоты, опущенной из т. A.

Вариант 2

1. Даны 3 вершины треугольника A(–1,1), B(3,–3), C(3,0). Вычислите какую-нибудь тригонометрическую функцию угла ABC.

2. Даны 3 вершины треугольника A(3,0), B(–1,3), C(5,5). Найдите длины его сторон, координаты и длину вектора медианы AO.

3. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку A(5, 3) параллельно прямой $3\times x - 2\times y + 4 = 0$.

4. Даны три вершины треугольника A(2,3), B(4,2), C(6,2). Составьте уравнение:

а) медианы, проведённой из точки A.

в) высоты, опущенной из т. A.

3.2.2. Контрольная работа 2

Вариант 1

1. Напишите каноническое и параметрическое уравнения прямой, проходящей через точку M_0 (3, 0, 1) параллельно вектору $\vec{a}$ (2, 5, 6).
2. Найдите угол между плоскостями π : 2x + y – z = 0 и σ : x – 3y +2z –1 =0.
3. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (1, 2, 3) параллельно векторам $\vec{a}$ (2, 3, 4) и $\vec{b}$ (1, 5, 2).
4. Даны вершины тетраэдра A(0, 0, 0), B(1, -3, 0), C(1, 2, 0), Д(0, 0, 5). Найдите объем и длину высоты этого тетраэдра, опущенного из вершины Д.
5. Найдите угол между прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-2}$ и плоскостью 3x – y – 2z –3 = 0.

Вариант 2

1. Напишите уравнения плоскости, проходящей через точку M(-1,3,0) перпендикулярно вектору $\vec{m}$ (2, -1, 1).

2. Найдите угол между прямыми:

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{3} \quad \text{и} \quad \frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-4}{3}.$$

3. Напишите каноническое уравнения прямой, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} 2x+y-3z+1=0 \\ 4x-y+2z+5=0 \end{cases}.$$

4. Даны вершины тетраэдра A(4, 2, 5), B(0, 2, 2), C(0, 2, 7), Д(1, 5, 0).

Найдите объем тетраэдра и длину высоты этого тетраэдра, опущенного из вершины Д.

5. Найдите угол между прямой $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{1}$ и плоскостью $2x + 3y - z - 6 = 0$.

3.2.3. Контрольная работа 3

Часть 1.

Привести уравнения линий и поверхностей II-го порядка к каноническому аффинному виду:

1. $2 \cdot x^2 - x \cdot y + y^2 = 0$
2. $- x \cdot y + 2 \cdot y \cdot z = 0$
3. $-x^2 + x \cdot y - y^2 - y - 1 = 0$

Часть 2.

1. Сделайте анализ школьных учебников по предмету «Геометрия»: не менее 5 авторских линеек, рекомендованных для использования в школе, не старше 5 лет, по одной из категорий (тем) предметной области «Геометрия» (по вариантам).
2. Отчет структурируйте: авторы, класс, тип учебника (общеобразовательный или профильный), тема, основные понятия, уровень сложности материала, наличие примеров и задач различного уровня сложности с примерами, особенности.
3. Сделайте подбор примеров и задач по уровням сложности: не менее 20 примеров и не менее 10 задач на каждый уровень (базовый, повышенный, творческий). Подборку сделать для конкретного класса.

Вариант	Понятийная линия (тема)
1.	Линейная зависимость векторов и ее свойства. Базис на плоскости и в пространстве. Разложение вектора по векторам базиса.
2.	Коллинеарность и компланарность векторов. Линейные операции в координатах.
3.	Скалярное произведение векторов.
4.	Уравнение прямой в аффинной системе координат.
5.	Уравнение прямой в прямоугольной декартовой системе координат.
6.	Угол между прямыми на плоскости.
7.	Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой
8.	Линейная зависимость векторов и ее свойства. Базис на плоскости и в пространстве. Разложение вектора по векторам базиса.
9.	Ориентация пространства. Векторное произведение векторов и его свойства
10.	Смешанное произведение векторов и его свойства.
11.	Различные виды уравнений плоскости в пространстве. Их использование при решении геометрических задач.
12.	Взаимное расположение двух плоскостей. Угол между плоскостями

Вариант	Понятийная линия (тема)
13.	Расстояние от точки до плоскости в пространстве
14.	Различные способы задания прямой в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Угол между прямыми.
15.	Расстояние от точки до прямой и между двумя скрещивающимися прямыми в пространстве
16.	Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью.
17.	Квадратичные формы. Аффинная и декартова классификации квадратичных форм.
18.	Аффинная и декартова классификации линий и поверхностей II-го порядка
19.	Эллипс и его свойства.
20.	Парабола и ее свойства.
21.	Гипербола и ее свойства.
22.	Цилиндры и конусы. Их свойства
23.	Поверхности вращения и их свойства
24.	Параболоиды и гиперболоиды. Их свойства

3.3. Проверочные работы

Тест 1. Входной тест «Векторы и операции над ними»

1 вариант

<u>I уровень</u>

Выбрать номер правильного ответа

1. Закончить фразу: два вектора называются коллинеарными, если направленные отрезки их порождающие:

а) параллельны одной и той же плоскости;
б) параллельны одной и той же прямой;
в) взаимно перпендикулярны.

Варианты ответов: 1) *первое;* 2)*второе;* 3) *третье;* 4) *все истинны.*

2. Закончить фразу: два вектора называются компланарными, если направленные отрезки их порождающие:

а) параллельны одной и той же плоскости;
б) параллельны одной и той же прямой;
в) попарно взаимно перпендикулярны.

Варианты ответов: 1) *а*; 2) *б*; 3) *в*; 4) *все 3 неверны.*

3. Какое из высказываний истинно:

1) если векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны;

2) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны;

3) если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны.

Варианты ответов: *1) первое; 2)второе; 3) третье; 4) все истинны*.

4. Сформулировать и изобразить:

а) правило треугольников,

б) определение разности векторов, изобразить разность векторов (имеющих общее начало).

5. Сформулировать и изобразить:
а) правило параллелограмма,
б) определение умножения вектора на скаляр.

II уровень

6. Закончить фразу: скалярное произведение векторов $\vec{a}$ (2,3), (4,1), и $\vec{b}$ (4,1) равно….

7. Закончить фразу: угол между векторами $\vec{a}(1{,}5{,}1)$ и $\vec{b}(2{,}1{,}\frac{2}{3})$ равен …

8. Закончить фразу: пусть $A(2,3)$, $B(4,1)$. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ равна …..

Выбрать номер правильного ответа:

9. Если векторы $\overrightarrow{AB}$ (-6, -5, 2), $\overrightarrow{BC}$(2, 3, -4) и $\overrightarrow{CD}$(3, -5, 1) являются сторонами четырехугольника *ABCD*, то модуль скалярного произведения векторов - диагоналей этого четырехугольника равен…

Варианты ответов: 1) 8; 2) 9; 3) 10; 4) 11; 5) 12.

III уровень

10. Если в параллелограмме *ABCD* заданы $\overrightarrow{CB}$(2, -1, 4), $\overrightarrow{CD}$(-3, 2, 1), A(5, -3, 2), то сумма координат точки C равна…

Варианты ответов: 1) 1; 2) -1; 3) 2; 4) -2; 5) 3.

Вариант 2

I уровень

Выбрать номер правильного ответа

1. Закончить фразу: два вектора называются коллинеарными, если направленные отрезки их порождающие:
а) параллельны одной и той же плоскости;
б) параллельны одной и той же прямой;
в) взаимно перпендикулярны.
Варианты ответов: 1) а; 2) б; 3) в; 4) все 3 неверны.

2. Какое из определений верно: конечная система векторов a_1, a_2, …, a_n, называется линейно зависимой, если

а) она содержит нулевой вектор; б) существуют отличные от нуля скаляры $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R$ такие, что $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ...\alpha_n a_n = \vec{0}$.

в) для любых $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R$

$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ...\alpha_n a_n = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, ..., \alpha_n = 0$.

Варианты ответов: 1) а; 2) б; 3) в; 4) все 3 неверны; 4) а, б.

3. Какое из высказываний истинно:

1) если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны;

2) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны;

3) если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны.

Варианты ответов: 1) первое; 2)второе; 3) третье; 4) все истинны.

4. Сформулировать и изобразить:

а) правило треугольников,

б) определение разности векторов, изобразить разность векторов (имеющих общее начало).

<u>II уровень</u>

5. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ *(2; –1)* и $\vec{b}$ *(2; 3)*, координаты которых заданы в ортонормированном базисе и вычислить косинус угла между ними.

6. Даны три вершины треугольника *A(2,1), B(-2,1), C(1,6)*. Найти длины сторон треугольника, длину медианы *CM*, длину высоты *CH* и площадь треугольника ABC.

<u>III уровень</u>

7. Найти длину биссектрисы *BD* в задаче № 6.

Вариант 2

<u>I уровень</u> Выбрать номер правильного ответа

1. Закончить фразу: два вектора называются компланарными, если направленные отрезки их порождающие:

а) параллельны одной и той же плоскости;

б) параллельны одной и той же прямой;

в) попарно взаимно перпендикулярны.

Варианты ответов: 1) а; 2) б; 3) в; 4) все 3 неверны.

2. Какое из определений верно: конечная система векторов a_1, a_2, …, a_n, называется линейно независимой, если

а) она не содержит нулевой вектор;

б) существуют одновременно не равные нулю скаляры $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n \in R$ такие, что $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ...\alpha_n a_n = \vec{0}$.

в) для любых $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n \in R$ $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ...\alpha_n a_n = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0,..., \alpha_n = 0$.

Варианты ответов: 1) а; 2) б; 3) в; 4) все 3 неверны; 4) а, в.

3. Среди векторов $\vec{a}_1 = -3e_2$, $\vec{a}_2 = -2e_1 + 5e_3$, $\vec{a}_3 = 2e_2 - e_3$, $\vec{a}_4 = 4e_3$, $\vec{a}_5 = e_1$, $\vec{a}_6 = e_2 - 3e_3$, $\vec{a}_7 = e_1 - 2e_2 + 3e_3$, $\vec{a}_8 = \vec{0}$, заданных в базисе $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, указать все векторы компланарные с векторами $\{\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$.

Варианты ответов: 1)$\{\vec{a}_1,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5\}$; 2)$\{\vec{a}_1,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5,\vec{a}_8\}$; 3)$\{\vec{a}_1,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_6,\vec{a}_8\}$; 4) $\{\vec{a}_1,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_6\}$

4. Сформулировать и изобразить:

а) правило параллелограмма,

г) определение умножения вектора на скаляр.

<u>II уровень</u>

5. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ *(-1; 2)* и $\vec{b}$ *(3; 2),* координаты которых заданы в ортонормированном базисе и вычислить косинус угла между ними.

6. Даны три вершины треугольника *A(1,2), B(6,1), C(1,-2).* Найти длины сторон треугольника, длину медианы *CM*, длину высоты *BH* и площадь треугольника ABC.

III уровень

7. Найти длину биссектрисы *BD* в задаче № 6.

Тест 2. Входной тест «Уравнения прямой линии и плоскости»

Выбрать номер правильного ответа

1. Среди векторов $\vec{a}_1(0,-3,0)$, $\vec{a}_2(-2,0,5)$, $\vec{a}_3(0,2,-1)$, $\vec{a}_4(0,0,4)$, $\vec{a}_5(1,0,0)$, $\vec{a}_6(0,1,-3)$, $\vec{a}_7(1,-2,3)$, $\vec{a}_8(0,0,0)$, заданных в базисе $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, указать все векторы компланарные с векторами $\{\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$.

Варианты ответов: 1) $\{\vec{a}_1,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5\}$; 2) $\{\vec{a}_1,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5,\vec{a}_8\}$; 3) $\{\vec{a}_1,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_6,\vec{a}_8\}$; 4) $\{\vec{a}_1,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_6\}$

2. Какое из определений верно?
Базисом векторного пространства называется такая упорядоченная система векторов этого пространства, которая удовлетворяет двум условиям:
1) – векторы этой системы линейно независимы;
– всякий вектор пространства является линейной комбинацией векторов этой системы.
2) – векторы этой системы линейно независимы;
– хотя бы один вектор пространства является линейной комбинацией векторов этой системы.

Варианты ответов: 1) первое; 2) второе; 3) оба верны; 4) оба неверны.

3. Какими из свойств, аналогичных следующим свойствам произведения чисел, обладает скалярное произведение векторов:

а) если *ab = 0*, то хотя бы одно из чисел *a* и *b* равно нулю;
б) *ab =ba*; в) если *ab = cb* и *b ≠ 0*, то *a = c*; г) *(a + b)c = ac + bc*;
д) *a(bc) = (ab)c?*

Варианты ответов: 1) *а, б*; 2) *б, г*; 3) *а, г;* 4) *б, д*.

4. Какие из указанных свойств могут служить необходимым и достаточным условием того, чтобы четырехугольник *ABCD* был параллелограммом: а) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$, где *O* – произвольная точка; в) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; г) $\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CD}$, где *M* – точка пересечения диагоналей.

Варианты ответов: 1) а, б, г; 2) б, в, г; 3) а, б, в; 4) а, в, г.

5. Какое из высказываний является истинным: а) если три вектора линейно зависимы, то они компланарны; б) три вектора линейно зависимы, когда они компланарны.

Варианты ответов: 1) первое; 2) второе; 3) оба истинны; 4) оба ложны.

6. Векторы называются линейно зависимыми, если их линейная комбинация равна $\vec{0}$ …

Вместо многоточия вставить номер условия, при котором все высказывание оказалось бы истинным. 1) при любом наборе коэффициентов; 2) если хотя бы один из коэффициентов не равен 0; 3) если все коэффициенты не равны 0; 4) если все коэффициенты равны 0.

Варианты ответов: 1); 2); 3); 4) .

7. Какое из высказываний истинно:

1) если векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны;

2) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны;

3) если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны.

Варианты ответов: 1) первое; 2)второе; 3) третье; 4) все истинны.

8. Дан вектор $\vec{d}(\alpha,\beta,\gamma)$ относительно базиса $B=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$векторного пространства *V*. Каковы координаты вектора $-\vec{d}$ относительно базиса $B'=\{\vec{a},-\frac{1}{2}\vec{b},\vec{c}\}$?

Варианты ответов: 1) $\vec{d}(-\alpha,2\beta,-\gamma)$; 2) $\vec{d}(-\alpha,\frac{1}{2}\beta,-\gamma)$; 3) $\vec{d}(\alpha,-2\beta,\gamma)$; 4) $\vec{d}(\alpha,-\frac{1}{2}\beta,\gamma)$

9. Какой угол образуют в пространстве векторы $\vec{a}(1,5,1)$ и $\vec{b}(2,1,\frac{2}{3})$

Самостоятельная работа 1. Различные способы задания прямой на плоскости

Вариант 1

1. Написать уравнение прямой, заданной

а) точкой и направляющим вектором;

б) точкой и ортогональным вектором;

в) в отрезках *a* и *b*.

2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку А (5, 3) перпендикулярно прямой 3x - 2y + 4 = 0.

3. Даны три вершины треугольника А(2,3), В(4,1), С(5,2). Составить уравнение

а) медианы, проведённой из точки С. в) высоты, опущенной из т. А.

4. Найти точку симметричную данной точке Р(5,6) относительно прямой, проходящей чрез точку А(2, 2) под углом 45° к прямой $3x + y - 4 = 0.$

Вариант 2

1. Написать уравнение прямой, заданной

а) двумя точками;

б) общее уравнение прямой;

в) точкой и угловым коэффициентом.

2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку А (1, 2) параллельно прямой

$$5x + 7y - 2 = 0.$$

3. Даны три вершины треугольника А(3,1), В(1, 3), С(5, 2). Составить уравнение

а)медианы, проведённой из точки С.

в) высоты, опущенной из т. А.

4. Найти точку симметричную данной точке Р(2,3) относительно прямой, проходящей через точку А(4, 2) под углом 45° к прямой $3x + y - 1 = 0.$

Самостоятельная работа 2. Взаимное расположение прямых. Угол между прямыми

Вариант 1

1. Как расположены прямые, заданные уравнениями:

$$l_1: \ 5x - 2y + 4 = 0 \text{ и } l_2: \ 7x + 3y - 2 = 0.$$

2. Определить расстояние от точки $M(3, 4)$ до прямой, проходящей через точку $A(2, 1)$ параллельно прямой $x + 2y - 5 = 0$.
3. Определить угол между двумя прямыми:

$$l_1: \ 3x - 2y + 1 = 0 \text{ и } l_2: \ 5x + y + 1 = 0.$$

Вариант 2

1. Как расположены прямые, заданные уравнениями:

$$l_1: \ 3x + 2y - 5 = 0 \text{ и } l_2: \ 6x + 4y - 3 = 0.$$

2. Определить расстояние от точки $M(4, 3)$ до прямой, проходящей через точку $A(1, 2)$ перпендикулярно прямой $-x + 4y + 6 = 0$.

3. Определить угол между двумя прямыми:

$$l_1: \ 2x + 3y - 4 = 0 \text{ и } l_2: \ 3x - 2y + 5 = 0.$$

Самостоятельная работа 3. Векторное и смешанное произведение. Уравнения плоскости

1. Определить координаты векторного произведения $a \times b$ и его длину $|\vec{a} \times \vec{b}|$, если даны векторы $\vec{a}$ (2, 1, 3) и $\vec{b}$ (1, 2, -3). $\vec{a}$ (0, 1, 0). Вычислить смешанное произведение векторов ($\vec{c}, \vec{d}, \vec{p}$), если $\vec{c}$ (2, 3, -1) и $\vec{d}$ (1, -1, 3), $\vec{p}$ (1, 9, -11). Будут ли векторы ($\vec{c}, \vec{d}, \vec{p}$) компланарными ?

2. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3, 0, 1)$ параллельно векторам $\vec{a}$ (2,5,6) и $\vec{b}$ (1, 2, 1).

3. Напишите уравнение плоскости, проходящей через три точки A(1, 3, 5), B(0,2,2), C(0,2,7).

4. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, 3, 5)$ перпендикулярно вектору $\vec{m}\,(2, 7, 3)$.

5. Даны вершины тетраэдра A(0,0,0), B(1,-3,0), C(1,2,0), Д(0,0,5).Найдите объем и длину высоты этого тетраэдра, опущенного из вершины А.

Самостоятельная работа 4. Различные способы задания плоскостей в пространстве. Взаимное расположение и угол между плоскостями

Указать номер правильного ответа

1. *Скалярное произведение* $\vec{a} \cdot \vec{b}$ *векторов* $\vec{a}\,(1, 0, 1)$ *и* $\vec{b}\,(2, 3, 4)$ *равно*

Варианты ответов

1) (2, 0, 4); 2) (3, 3, 5); 3) 6.

2. *Векторное произведение* $\vec{a} \times \vec{b}$ *векторов* $\vec{a}\,(1, 0, 1)$ *и* $\vec{b}\,(2, 3, 4)$ *равно*

Варианты ответов

1) (2, 0, 4); 2) (-3, -2, 3); 3) (-3, 2, 3).

3. *Смешанное произведение векторов* $\vec{a}\,(2, 1, 0)$, $\vec{b}\,(1, 3, 4)$ *и* $\vec{c}\,(0, 1, 5)$ *равно*

Варианты ответов

1) 17; 2) (0, 3, 0); 3) 3.

4. *Уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (1, 0, 2) перпендикулярно вектору $\vec{m}$ (1, 2, 5) имеет вид*

Варианты ответов

1) $x + 2z - 11 = 0$; 2) $x + 2y + 5z - 11 = 0$; 3) $2x - 2z = 0$.

5. *Закончить фразу: плоскости $П_1$: $x + 2y - 3z + 4 = 0$ и $П_2$: $2x + 4y - 6z + 5 = 0$ ....*

Варианты ответов

1) *пересекаются по одной прямой; 2) совпадают; 3) параллельны.*

6. *Закончить фразу: угол между плоскостями $П_1$:*
$2x + 2y - 3z + 4 = 0$ *и* $П_2$: $5x + 4y + 6z + 5 = 0$...

Варианты ответов

1) 180^0; 2) 90^0; 3) 0^0.

Самостоятельная работа 5. Различные способы задания прямых и плоскостей в пространстве.

Вариант 1

1. Напишите все виды уравнений плоскости, проходящей через точку $A(4, -2, 5)$ и прямую l, заданную пересечением двух плоскостей:

$$\begin{cases} 2x - y + z - 10 = 0 \\ x + 4y - 5z + 4 = 0 \end{cases}.$$

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую l_1

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 + 2t., t \in R \\ z = -2 - t \end{cases}, \text{ параллельную прямой } l_2 \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 2y - z - 5 = 0 \end{cases}.$$

3. Составить уравнение плоскости, проходящие через две параллельные прямые

$$l_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2} \text{ и } l_2: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}.$$

4. Напишите все виды уравнений плоскости, проходящие через 2 прямые:

$$l_1: \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + 4y - 5z + 4 = 0 \end{cases} \text{ и } l_2: \frac{x-5}{1} = \frac{y-5}{11} = \frac{z-5}{9}.$$

Вариант 2

1. Напишите каноническое и параметрическое уравнения прямой, проходящей через точку A(2, 0, 1) параллельно вектору $\vec{a}$ (3, 4, 7).

2. Напишите прямой, проходящей через точки A(3, 0, 1) и B(0, 2, 2).

3. Напишите уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{4}, \text{ параллельно прямой } \frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{3}.$$

.

4. Найдите угол между плоскостями:

$$2x + 2y - z = 0 \text{ и } x - 2y - 3z - 1 = 0.$$

5. Найдите угол между прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-2}$ и плоскостью $3x - y - 2z - 3 = 0$.

6. Даны вершины тетраэдра A(0, 0, 0), B(1, -3, 0), C(1, 2, 0), D(0, 0, 5). Найдите длину высоты этого тетраэдра, опущенной из вершины A.

Самостоятельная работа 6. Взаимное расположение прямых в пространстве

1. Как расположены прямые l_1 и l_2? Найти расстояние между ними.

$$l_1: \ \frac{x-5}{1}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-5}{1} \text{ и } l_2: \ \frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-1}{5}.$$

2. Как расположены прямые l_1 и l_2? Найти расстояние между ними.

$$l_1: \ \frac{x-5}{1}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-5}{1} \ и \ l_2: \begin{cases} x=1+5t \\ y=1-2t, \ t\in R. \\ z=1 \end{cases}$$

3. Как расположены прямые l_1 и l_2? Найти расстояние между ними.

$$l_1: \ \frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+2}{-4} \ и \ l_2: \begin{cases} x=5-6t \\ y=-6-2t, \ t\in R. \\ z=3+8t \end{cases}$$

4. Как расположены прямые l_1 и l_2? Найти расстояние между ними.

$$l_1: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t, \ t\in R \\ z=3+t \end{cases} \ и \ l_2: \begin{cases} x-y-2z-1=0 \\ 2x+y-z+7=0 \end{cases}.$$

Самостоятельная работа 7. Эллипс, гипербола и парабола

Вариант 1

1. Напишите уравнение эллипса, фокусы которого лежат симметрично относительно начала координат, если а) $F_1(-8, 0)$, $F_2(8, 0)$ и $a = 10$ – большая полуось; б) $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$ и $x = \pm\frac{25}{4}$ – уравнения директрис;

в) B(0, 6) – вершина, F(3, 0) – фокус.

2. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная:

а) F(5, 0) – фокус и $b = 4$ – мнимая полуось;

б) 2c = 6 (фокальное расстояние), $\varepsilon = \frac{3}{2}$ (эксцентриситет); в) $y = \pm\frac{4}{3}x$ – уравнения асимптот и F(-10, 0) – фокус.

3. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная что: а) парабола расположена симметрично относительно оси Оx и проходит через точку М(9; 6); б) парабола расположена симметрично относительно оси Оx и проходит через точку М(-1; 3).

4. Даны уравнения асимптот гиперболы $\mathbf{y} = \pm 3x$ и уравнения директрис $x = \pm 1$. Составить каноническое уравнение гиперболы.

Вариант 2

1. Напишите уравнение эллипса, фокусы которого лежат симметрично относительно начала координат, если а) $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$ и $b = 3$ – малая полуось;

б) $F_1(-8, 0)$, $F_2(8, 0)$ и $x = \pm\frac{25}{2}$ – уравнения директрис;

в) $B^{/}(0, -3)$ – вершина, F(5, 0) – фокус.

2. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная: а) F(6, 0) – фокус и $a = 5$ –

действительная полуось; б) 2с = 8(фокальное расстояние), $\varepsilon = \frac{4}{3}$ (эксцентриситет); в) у = $\pm\frac{5}{2}x$ – уравнения асимптот и F($\sqrt{29}$, 0) – фокус.

3. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная что: а) парабола расположена симметрично относительно оси OY и проходит через точку М(1; 1); б) парабола расположена симметрично относительно оси OY и проходит через точку М(4; -8).

4. Даны уравнения асимптот гиперболы: $\mathbf{y} = \pm 3x$ и уравнения директрис $x = \pm 1$**.** Составить каноническое уравнение гиперболы.

3.4. Вопросы к зачету

Вопросы к зачету

1. Ориентация пространства. Примеры.
2. Векторное произведение векторов. Примеры.
3. Скалярное и смешанное произведения векторов. Примеры.
4. Различные уравнения плоскости в пространстве. Уравнение плоскости, заданной точкой и двумя направляющими векторами. Уравнение плоскости, заданной тремя точками. Примеры.
5. Уравнение плоскости, заданной точкой и ортогональным вектором.
6. Общее уравнение плоскости и его исследование.
7. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Примеры.
8. Угол между двумя плоскостями. Примеры.
9. Расстояние от точки до плоскости. Примеры.
10. Различные способы задания прямой в пространстве. Параметрическое и каноническое уравнения прямой, заданной точкой и направляющим вектором. Уравнение прямой, заданной двумя точками. Примеры.
11. Прямая, заданная пересечением плоскостей. Примеры.
12. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
13. Угол между прямыми, заданными направляющими векторами. Примеры.
14. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Примеры.

Задачи к зачету

I уровень.

Указать номер правильного ответа в каждом задании. Система координат – прямоугольная.

1. Скалярное произведение векторов $\vec{a}(1,0,1)$ *и* $\vec{b}(2,3,4)$ равно:
1) (2, 0, 4); 2) (3, 3, 5); 3) 6.

2. Векторное произведение векторов $\vec{a}(1,0,1)$ *и* $\vec{b}(2,3,4)$ имеет координаты:
1) (2, 0, 4); 2) (-3, -2, 3); 3) (-3, 2, 3).

3. Смешанное произведение векторов $\vec{a}(2,1,0), \vec{b}(1,3,4), \vec{c}(0,1,5)$ равно:
1) 17; 2) (0, 3, 0); 3) 3.

4. Уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (1, 0, 2) перпендикулярно вектору $\vec{m}(1,2,5)$ имеет вид:
1) $x + 2z - 11 = 0$; 2) $x + 2y + 5z - 11 = 0$; 3) $2x - 2z = 0$.

5. Плоскости $x + 2y - 3z + 4 = 0$ и $2x + 4y - 6z + 5 = 0$
1) пересекаются по прямой; 2) совпадают; 3) параллельны.

6. Угол между плоскостями $2x + 2y + 2z + 4 = 0$ и $2x + 4y - 6z + 5 = 0$ равен:
1) 180^0; 2) 90^0; 3) 0^0.

II уровень.

7. Напишите уравнение плоскости, проходящей через прямую
$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{4}$, параллельно прямой $\frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{3}$.

8. Найдите угол между плоскостями: $2x + y - z = 0$ и $x - 3y + 2z - 1 = 0$.

9. Напишите каноническое и параметрическое уравнения прямой, проходящей через точку $A(3, 0, 1)$ параллельно вектору $\vec{a}(2, 5, 6)$.

10. Найдите уравнение прямой, заданной пересечением плоскостей:
$$\begin{cases} 2x + y - 3z + 1 = 0 \\ 4x - y + 2z + 5 = 0 \end{cases}.$$

11. Найдите угол между прямыми: $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$ и $\frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{3}$.

12. Найдите угол между прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-2}$ и плоскостью.
$3x - y - 2z - 3 = 0$.

13. Доказать, что прямая $\begin{cases} 3x - y + 2z - 1 = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$ принадлежит плоскости $4x - 4y + 7z - 3 = 0$.

14. Даны вершины тетраэдра $A(0, 0, 0)$, $B(1, -3, 0)$, $C(1, 2, 0)$, $D(0, 0, 5)$. Найдите объем и длину высоты этого тетраэдра, опущенной из вершины A.

III уровень.

15. Найдите расстояние между прямыми
$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3} \text{ и } \frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{3}$$

3.5. Вопросы к экзамену

Вопросы к экзамену

1. Ориентация пространства. Примеры.
2. Векторное произведение векторов. Примеры.
3. Скалярное и смешанное произведения векторов. Примеры.
4. Различные уравнения плоскости в пространстве. Уравнение плоскости, заданной точкой и двумя направляющими векторами. Уравнение плоскости, заданной тремя точками. Примеры.
5. Уравнение плоскости, заданной точкой и ортогональным вектором.
6. Общее уравнение плоскости и его исследование.
7. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Примеры.
8. Угол между двумя плоскостями. Примеры.
9. Расстояние от точки до плоскости. Примеры.
10. Различные способы задания прямой в пространстве. Параметрическое и каноническое

уравнения прямой, заданной точкой и направляющим вектором. Уравнение прямой, заданной двумя точками. Примеры.

11. Прямая, заданная пересечением плоскостей. Примеры.
12. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
13. Угол между прямыми, заданными направляющими векторами. Примеры.
14. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Примеры.
15. Квадратичные формы и их аффинная классификация. Примеры.
16. Аффинная классификация кривых II-го порядка на плоскости. Примеры.
17. Ортогональные 2×2-матрицы. Декартова классификация кривых II-го порядка на плоскости. Примеры.
18. Эллипс: вывод канонического уравнения. Примеры.
19. Эллипс: директориальное свойство. Примеры.
20. Гипербола: вывод канонического уравнения. Примеры.
21. Гипербола: директориальное свойство. Примеры.
22. Парабола. вывод канонического уравнения. Примеры.
23. Парабола: директориальное свойство. Примеры.

Задачи к экзамену

I уровень.

Указать номер правильного ответа в каждом задании. Система координат – прямоугольная.

1. Скалярное произведение векторов $\vec{a}(1,0,1)$ *и* $\vec{b}(2,3,4)$ равно:

1) (2, 0, 4); 2) (3, 3, 5); 3) 6.

2. Векторное произведение векторов $\vec{a}(1,0,1)$ *и* $\vec{b}(2,3,4)$ имеет координаты:

1) (2, 0, 4); 2) (-3, -2, 3); 3) (-3, 2, 3).

3. Смешанное произведение векторов $\vec{a}(2,1,0), \vec{b}(1,3,4), \vec{c}(0,1,5)$ равно:

1) 17; 2) (0, 3, 0); 3) 3.

4. Уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (1, 0, 2) перпендикулярно вектору $\vec{m}(1,2,5)$ имеет вид:

1) $x + 2z - 11 = 0$; 2) $x + 2y + 5z - 11 = 0$; 3) $2x - 2z = 0$.

5. Плоскости $x + 2y - 3z + 4 = 0$ и $2x + 4y - 6z + 5 = 0$

1) пересекаются по прямой; 2) совпадают; 3) параллельны.

6. Угол между плоскостями $2x + 2y + 2z + 4 = 0$ и $2x + 4y - 6z + 5 = 0$ равен:

1) 180^0; 2) 90^0; 3) 0^0.

II уровень.

7. Напишите уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{4}$, параллельно прямой $\frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-4}{3}$.

8. Найдите угол между плоскостями: $2x + y - z = 0$ и $x - 3y + 2z - 1 = 0$.

9. Напишите каноническое и параметрическое уравнения прямой, проходящей через точку $A(3, 0, 1)$ параллельно вектору $\vec{a}$ (2, 5, 6).

10. Найдите уравнение прямой, заданной пересечением плоскостей:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z + 1 = 0 \\ 4x - y + 2z + 5 = 0 \end{cases}.$$

11. Найдите угол между прямыми: $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{3}$ и $\frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-4}{3}$.

12. Найдите угол между прямой $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{-2}$ и плоскостью.
$3x - y - 2z - 3 = 0$.

13. Доказать, что прямая $\begin{cases} 3x - y + 2z - 1 = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$ принадлежит плоскости $4x - 4y + 7z - 3 = 0$.

14. Даны вершины тетраэдра $A(0, 0, 0)$, $B(1, -3, 0)$, $C(1, 2, 0)$, $D(0, 0, 5)$. Найдите объем и длину высоты этого тетраэдра, опущенной из вершины A.

III уровень.

15. Напишите уравнение эллипса, фокусы которого лежат симметрично относительно начала координат, если а) $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$ и $b = 3$ – малая полуось;
б) $F_1(-8, 0)$, $F_2(8, 0)$ и $x = \pm\dfrac{25}{2}$ – уравнения директрис;
в) $B'(0, -3)$ – вершина, $F(5, 0)$ – фокус.

16. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная: а) $F(6, 0)$ – фокус и $a = 5$ – действительная полуось; б) $2c = 8$(фокальное расстояние), $\varepsilon = \dfrac{4}{3}$ (эксцентриситет); в) $y = \pm\dfrac{5}{2}x$ – уравнения асимптот и $F(\sqrt{29}, 0)$ – фокус.

17. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная что: а) парабола расположена симметрично относительно оси OY и проходит через точку $M(1; 1)$; б) парабола расположена симметрично относительно оси OY и проходит через точку $M(4; -8)$.

18. Даны уравнения асимптот гиперболы: $y = \pm 3x$ и уравнения директрис $x = \pm 1$. Составить каноническое уравнение гиперболы.

Напишите уравнение эллипса, фокусы которого лежат симметрично относительно начала координат, если а) $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$ и $b = 3$ – малая полуось;
б) $F_1(-8, 0)$, $F_2(8, 0)$ и $x = \pm\dfrac{25}{2}$ – уравнения директрис;
в) $B'(0, -3)$ – вершина, $F(5, 0)$ – фокус.

19. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная: а) $F(6, 0)$ – фокус и $a = 5$ – действительная полуось; б) $2c = 8$(фокальное расстояние), $\varepsilon = \dfrac{4}{3}$ (эксцентриситет); в) $y = \pm\dfrac{5}{2}x$ – уравнения асимптот и $F(\sqrt{29}, 0)$ – фокус.

20. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная что: а) парабола расположена симметрично относительно оси OY и проходит через точку $M(1; 1)$; б) парабола расположена симметрично относительно оси OY и проходит через точку $M(4; -8)$.

21. Даны уравнения асимптот гиперболы: $y = \pm 3x$ и уравнения директрис $x = \pm 1$. Составить каноническое уравнение гиперболы.

3.6. Методические указания к решению проверочных и контрольных работ

Задачи на овладение основными понятиями и утверждениями векторной алгебры и различными способами задания прямой на плоскости

<u>Задание 1.</u> Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(1, 2)$; $B(0, 1,)$, $C(2, 1,)$. Найти длины сторон AB и AC и какую-нибудь функцию угла BAC.

Решение.

$\overrightarrow{AB} = (0–1, 1–2) = (-1, -1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (2–1, 1–2) = (1, -1)$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; $\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|AC\right|} = \frac{-1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{0}{2} = 0$$, следовательно, $\angle \mathrm{A} = 90^0$.

<u>Задание 2</u>. Даны 3 вершины треугольника $A(1, 2)$, $B(1, -2)$, $C(6, 1)$. Найти длину вектора высоты CH и площадь треугольника ABC.

Решение.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\mathrm{mod}[(-2+12+1)-(-12+2+1)] = 10.$$

$\overrightarrow{AB} = (1–1, –2–2) = (0, –4)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$.

$$|CH| = \frac{2S_{\Delta ABC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{2 \cdot 10}{4} = \frac{20}{4} = 5.$$

Ответ: $S_{\Delta ABC} = 10$, $|CH| = 5$.

<u>Задание 3.</u> Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(2; 9)$ параллельно прямой $6x – 7y + 15 = 0$.

Решение.

Решим двумя способами. Если прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$, то можно найти ее направляющий вектор $\vec{a}(-B, A)$ (параллельный данной прямой) или вектор нормали $\vec{n}(A, B)$ (перпендикулярный данной прямой).

В уравнении прямой l_1: $6x – 7y + 15 = 0$ найдем коэффициенты $A = 6$, $B = –7$. Тогда вектор $\vec{a}(-B = 7, A = 6)$ является направляющим вектором, а вектор $\vec{n}(A = 6, B = -7)$ – вектором нормали прямой l_1. Искомая прямая l_2 параллельна прямой l_1, следовательно, $\vec{a}(7,6)$ – также является направляющим вектором прямой l_2, а вектор $\vec{n}(6,-7)$ – вектором нормали прямой l_2.

I. Подставив координаты точки $M(2; 9)$ и координаты направляющего вектора $\vec{a}(7,6)$ в каноническое уравнение прямой, получим:

$$\frac{x-2}{7} = \frac{y-9}{6} \Leftrightarrow 6 \cdot (x – 2) = 7 \cdot (y – 9) \Leftrightarrow 6 \cdot x – 7 \cdot y + 51 = 0.$$

II. Подставим координаты точки $M(x_0 = 2;\ y_0 = 9)$ и координаты вектора нормали $\vec{n}(A = 6, B = -7)$ в уравнение прямой, заданной точкой и вектором нормали

$A(x– x_0) + B(y–y_0) = 0$, получим: $6(x– 2) –7(y – 9) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot x – 7 \cdot y + 51 = 0$.

Ответ: $6x – 7y + 51 = 0$.

<u>Задание 4.</u> Найти уравнение прямой, проходящей через точку (-1, 1) параллельно к прямой $2 \cdot x - 3 \cdot y + 5 = 0$.

Решение. В силу параллельности прямых угловой коэффициент искомой прямой равен угловому коэффициенту $k=\frac{2}{3}$ данной прямой. Подставляя в ***уравнение прямой с угловым коэффициентом*** $y-y_1=k\cdot(x-x_1)$ значение коэффициента $k=\frac{2}{3}$, $x_1=1, y_1=2$, получим уравнение прямой $y-2=\frac{2}{3}\cdot(x-1)$. После преобразования имеем: $2x-3y+4=0$.

Ответ: $2x-3y+4=0$

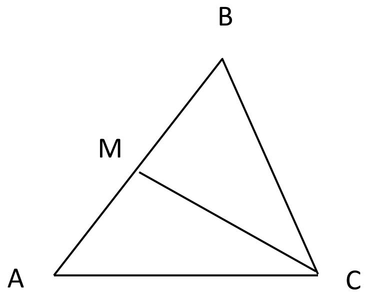
<u>**Задание 5**</u>. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (-1, 1) перпендикулярно прямой $3x-y+2=0$.

Решение. Угловой коэффициент данной прямой $k_1=3$. Из условия перпендикулярности прямых $k_1\cdot k_2=-1$, получаем угловой коэффициент k_2 искомой прямой: $3\cdot k_2=-1$или $k_2=-\frac{1}{3}$. Итак, получаем уравнение искомой прямой $y-1=-\frac{1}{3}\cdot(x+1)$ или $x+3y-2=0$.

Ответ: $x+3y-2=0$.

<u>**Задание 6.**</u> Даны вершины треугольника: $A(1,2)$, $B(3,1)$, $C(5, 6)$. Составить уравнения: *а*) трех сторон; *б*) медианы, проведенной из точки С.

Решение.



Воспользовавшись уравнением прямой, заданной двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, получим уравнения трех сторон:

(AB): $\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{1-2}$ $\Leftrightarrow -1(x-1)=2(y-2) \Leftrightarrow x+2\cdot y-5=0$.

(BC): $\frac{x-3}{5-3}=\frac{y-1}{6-1}$ $\Leftrightarrow 5(x-3)=2(y-1) \Leftrightarrow 5\cdot x-2\cdot y-13=0$.

(AC): $\frac{x-1}{5-1}=\frac{y-2}{6-2}$ $\Leftrightarrow 4(x-1)=4(y-2) \Leftrightarrow (x-1)=(y-2) \Leftrightarrow x-y+1=0$.

Точка M (x_M, y_M) делит отрезок AB пополам, найдем координаты середины отрезка AB.

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+3}{2}=2,\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$$

По двум точкам $C(5, 6)$ и M $(2, \frac{3}{2})$ найдем уравнение медианы (CM):

$\frac{x-5}{2-5}=\frac{y-6}{1{,}5-6}$ $\Leftrightarrow -4{,}5(x-5)=-3(y-6) \Leftrightarrow 4{,}5\cdot x-3\cdot y-4{,}5=0 \Leftrightarrow 3\cdot x-2\cdot y-3=0$.

Ответ: (AB): $x + 2y - 5 = 0$; (BC): $5x - 2y - 13 = 0$; (AC): $x - y + 1 = 0$; (CM): $3x - 2y - 3 = 0$.

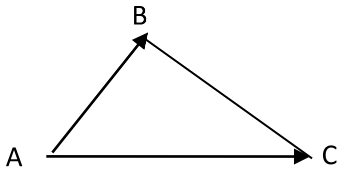
Задачи на овладение основными способами задания прямой и плоскости в пространстве

<u>**Задание 1.**</u> Треугольник ABC задан координатами своих вершин:

$$A(1, 2, -3);\ B(0, 1, 2),\ C(2, 1, 1).$$

1. Найти угол BAC, используя скалярное произведение.
2. Найти площадь треугольника ABC, используя векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Решение.



1. Вычислим координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, затем их длины:

$$\overrightarrow{AB} = (0-1,\ 1-2,\ 2+3) = (-1, -1, 5),\ \overrightarrow{AC} = (2-1,\ 1-2,\ 1+3) = (1, -1, 4).$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+5^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3};\ \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{1^2+(-1)^2+4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Используя скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, вычислим косинус угла BAC:

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{-1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+5\cdot 4}{3\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{20}{9\sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{6}}{27}.$$

2. Вычислим векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix}-1 & 5\\ -1 & 4\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 1 & 4\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\right) = (1, 9, 2)$$

Вычислим площадь треугольника ABC.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{\sqrt{1^2+9^2+2^2}}{2} = \frac{\sqrt{86}}{2}.$$

Ответ: $\angle A = \arccos\frac{10\sqrt{6}}{27}$; $S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{86}}{2}$.

<u>**Задание 2.**</u> Напишите каноническое и параметрическое уравнения прямой, проходящей через точку M_0 (1, 0, 3) параллельно вектору $\vec{a}$ (6, 5, 2).

Решение. ***Параметрическое уравнение прямой в пространстве*** имеет вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\cdot m;\\ y = y_0 + \lambda\cdot n;\ \lambda\in R.\\ z = z_0 + \lambda\cdot l.\end{cases}$$

Каноническое уравнение прямой в пространстве имеет вид: $\dfrac{x-x_1}{m} = \dfrac{y-y_1}{n} = \dfrac{z-z_1}{l}$.

Здесь M_0 (x_0, y_0, z_0) – точка, лежащая на прямой, $\vec{a}$ (m, n, l) – направляющий вектор.

Таким образом, имеем 2 уравнения прямой: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \cdot 6; \\ y = 0 + \lambda \cdot 5; \\ z = 3 + \lambda \cdot 2. \end{cases}$ и $\dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y-0}{5} = \dfrac{z-3}{2}$.

Ответ: $\begin{cases} x = 1 + 6 \cdot \lambda; \\ y = 5 \cdot \lambda; \quad \lambda \in R; \\ z = 3 + 2 \cdot \lambda. \end{cases}$ $\dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-3}{2}$

Задание 3. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1, 2, 3)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{OM}$.

Решение. Вектор нормали $\vec{n} = \overrightarrow{OM}(-1, 2, 3)$. Подставим в уравнение плоскости, заданной точкой и ортогональным вектором $A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0$. Имеем: $-1(x+1) + 2(y-2) + 3(z-3) = 0$ или $-x + 2 \cdot y + 3 \cdot z - 14 = 0$.

Ответ: $-x + 2 \cdot y + 3 \cdot z - 14 = 0$.

Задание 4. Плоскость α задана точками A, B, C, где $A(1, 2, 0)$, $B(5, 3, 2)$, $C(3, 1, 1)$.

1. Запишите каноническое, а затем общее уравнение плоскости α.
2. Используя общее уравнение, запишите координаты ортогонального вектора $\vec{n}$ плоскости α.

Решение. Вычислим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}\,(4, 1, 2)$ и $\overrightarrow{AC}(2, -1, 1)$, затем воспользуемся уравнением (1).

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

Будем считать, что плоскость α задана точкой $A(1, 2, 0)$ и двумя неколлинеарными векторами $\overrightarrow{AB}\,(4, 1, 2)$ и $\overrightarrow{AC}(2, -1, 1)$.

В результате получим уравнение:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Разложим определитель, стоящий в левой части уравнения, по элементам первой строки:

$$(x-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (y-2) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Преобразуем полученное уравнение к виду: $\alpha : 3x - 6z - 3 = 0$. Вектором ортогональным плоскости будет $\vec{n}(3, 0, -6)$.

Ответ. $\alpha : 3x - 6z - 3 = 0, \vec{n}(3, 0, -6)$.

Задание 5. Найдите угол между плоскостями

$$\pi : 3x + 2y - z = 0 \text{ и } \sigma : x - 3y + 2z + 1 = 0.$$

Решение. Пусть даны уравнения двух плоскостей: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$; $A_2\cdot x\ \ +B_2\cdot y+C_2\cdot z+D_2=0$, где

$\overrightarrow{n_1}(A_1,B_1,C_1)$ и $\overrightarrow{n_2}(A_2,B_2,C_2)$ – векторы нормали к этим плоскостям.

Углом между двумя плоскостями будем называть любой из двух смежных двугранных углов, образованных этими плоскостями. Очевидно, один из этих двугранных углов равен углу φ между векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. Угол между двумя плоскостями вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Таким образом, $\cos\varphi=\dfrac{3\cdot1+2\cdot(-3)+1\cdot2}{\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}}=\dfrac{-1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}}=\dfrac{-1}{14}$, тогда

$\varphi=\pi-\arccos\dfrac{1}{14}$.

Ответ: $\varphi=\pi-\arccos\dfrac{1}{14}$.

__Задание 6.__ Найдите угол между прямой $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{-2}$ и плоскостью $4x+2y+2z-3=0$.

Решение. Пусть дано уравнение прямой линии

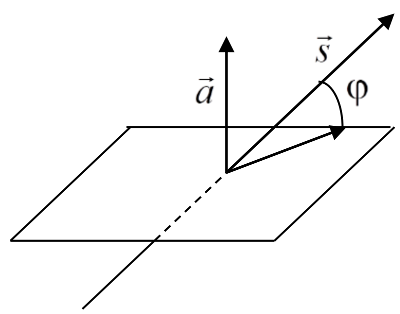
$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{l}$$

и уравнение плоскости

$$A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0.$$

$\vec{s}(m,n,l)$ – направляющий вектор прямой, $\vec{a}(A,B,C)$ – нормальный вектор плоскости.

Очевидно, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{s}$ равен $\dfrac{\pi}{2}-\varphi$, где φ – угол между прямой и плоскостью, а значит:



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=sin\varphi=\frac{|A\cdot m+B\cdot n+C\cdot l|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+l^2}}$$

Воспользуемся данной формулой

$$sin\varphi=\frac{|4\cdot1+2\cdot1-2\cdot2|}{\sqrt{4^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{2}{\sqrt{24\cdot6}}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6},\ \varphi=\arcsin\frac{1}{6}$$

Ответ: $\varphi = \arcsin\frac{1}{6}$.

<u>Задание 7.</u> Найти угол между прямыми

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+3}{1} \text{ и } \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-1}.$$

Решение.

Направляющие векторы этих прямых $\overrightarrow{s_1}(1,-4,1)$ и $\overrightarrow{s_2}(2,-2,-1)$. Следовательно,

$$\cos\varphi = \pm\frac{1\cdot 2+(-4)\cdot(-2)+1\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

отсюда $\cos\varphi = \frac{\pi}{4}$ или $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Ответ: $\varphi = \frac{3\pi}{4}$

<u>Задание 8.</u> Вычислить расстояние от плоскости $\alpha: x+2y+2z+3=0$ до точки M_1(-1, 1, -1).

Решение. Формула для вычисления расстояния от точки до плоскости будет иметь следующий вид:

$$\rho(M_1,\alpha) = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Замечание 1. Если точка M_1 принадлежит плоскости α, то расстояние от точки M_1 до плоскости равно нулю.

$$\text{Имеем: } \rho(M_1,\alpha) = \frac{|1\cdot(-1)+2\cdot 1+2\cdot(-1)+3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\rho(M_1,\alpha) = \frac{2}{3}$

Задание 9. Даны вершины тетраэдра $A(0, 0, 0)$, $B(1, -3, 0)$, $C(1, 2, 0)$, $D(0, 0, 5)$. Найдите объем и длину высоты этого тетраэдра, опущенного из вершины D.

Решение.

$V_{тетраэдра} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right|$, длина высоты DH находится по формуле:

$$|DH| = \frac{\left|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|} \tag{1}$$

Вычислим координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ затем их смешанное произведение: $\overrightarrow{AB}$ = (1–0, –3–0, 0 – 0) = (1, –3, 0), $\overrightarrow{AC}$ = (1– 0, 2 – 0, 0 – 0) = (1, 2, 0), $\overrightarrow{AD}$ = (0 – 0, 0 – 0, 5 – 0) = (0, 0, 5).

$$V_{тетраэдра} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right| = \frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \frac{25}{6}.$$

Вычислим векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, затем его длину:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 5), \quad \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 5^2} = 5.$$

Подставим найденные значения в формулу (1) и вычислим длину высоты DH:

$$|DH| = \frac{\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|}{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|} = \frac{25}{6 \cdot 5} = \frac{5}{6}.$$

Ответ: $V_{тетраэдра} = \frac{25}{6}$, $|DH| = \frac{5}{6}$.