МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Тобольский педагогический институт им. Д.И.Менделеева (филиал)
Тюменского государственного университета

УТВЕРЖДАЮ
Директор
_________________ Шилов С.П

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ

АЛГЕБРА

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Профили: математика; информатика
Форма обучения: очная

1. Паспорт оценочных материалов по дисциплине

1.1. Перечень компетенций

Код и наименование компетенции	Компонент (знаниевый/функциональный)
ОК-3 способность использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве	Знает основные понятия и доказательства фактов основных разделов курса (алгебраические структуры, линейная алгебра, алгебра многочленов).
	Умеет строить примеры групп, колец, полей, векторных пространств и связанных с ними объектов; выполнять действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме; устанавливать линейную зависимость или независимость систем векторов; находить базис и размерность векторных пространств и их подпространств, координаты векторов; решать типовые задачи.
ПК-4 способность использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемого учебного предмета	Знает области приложения знаний по алгебре в содержании школьного курса математики
	Может составить алгоритм решения задачи по алгебре для использования в учебном процессе и пояснить решение типовых школьных задач

1.2. Паспорт оценочных средств по дисциплине

№ п/п	Темы дисциплины в ходе текущего контроля, вид промежуточной аттестации	Код компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства (количество вариантов, заданий и т.п.)
1 семестр			
1	Бинарные алгебраические операции. Группы	ОК-3, ПК-4	Вопросы к коллоквиуму Практические работы Проверочные работы
2	Кольца и поля. Гомоморфизм и изоморфизм алгебраических структур	ОК-3, ПК-4	Вопросы к коллоквиуму Практические работы Проверочные работы
3	Числовые системы. Поле комплексных чисел	ОК-3, ПК-4	Вопросы к коллоквиуму Практические работы Проверочные работы
4	Действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме	ОК-3, ПК-4	Вопросы к коллоквиуму Практические работы Проверочные работы
5	Векторное пространство	ОК-3, ПК-4	Вопросы к коллоквиуму Практические работы Проверочные работы
	Экзамен	ОК-3	Вопросы к экзамену (теоретический и задача)
2 семестр			
1	Векторное пространство	ОК-3, ПК-4	Вопросы к коллоквиуму Практические работы Проверочные работы
2	Определители	ОК-3, ПК-4	Вопросы к коллоквиуму

			Практические работы Проверочные работы
3	Системы линейных уравнений	ОК-3, ПК-4	Вопросы к коллоквиуму Практические работы Проверочные работы
4	Матрицы и операции над ними	ОК-3, ПК-4	Вопросы к коллоквиуму Практические работы Проверочные работы
	Экзамен	ОК-3	Вопросы к экзамену (теоретический и задача)
3 семестр			
1	Линейные отображения векторных пространств	ОК-3, ПК-4	Практические работы Проверочные работы
2	Матрица линейного оператора	ОК-3, ПК-4	Практические работы Проверочные работы
3	Алгебра линейных операторов и её изоморфизм полной матричной алгебре.	ОК-3, ПК-4	Практические работы Проверочные работы
4	Кольцо K[x] многочленов от одного переменного	ОК-3, ПК-4	Практические работы Проверочные работы
5	Многочлены от нескольких переменных	ОК-3, ПК-4	Практические работы Проверочные работы
6	Многочлены над Q, R, C	ОК-3, ПК-4	Практические работы Проверочные работы
	Контрольная работа	ОК-3, ПК-4	Задачи и методический вопрос.
	Экзамен	ОК-3, ПК-4	Вопросы к экзамену (теоретический и задача)

1.3. Показатели, критерии и шкала оценивания сформированности компетенций

Код и наименование компетенции	Компонент (знаниевый/функциональный)	Оценочные материалы	Критерии оценивания
ОК-3 способность использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве	Знает основные понятия и доказательства фактов основных разделов курса (алгебраические структуры, линейная алгебра, алгебра многочленов).	Контрольные вопросы Теоретические вопросы к экзамену	*Пороговый уровень:* может выполнять работы под контролем преподавателя. *Базовый уровень:* может выполнять работы самостоятельно. *Повышенный уровень:* готов выполнять работы в условиях учебно-воспитательного процесса с обучающимися.
	Умеет строить примеры групп, колец, полей, векторных пространств и связанных с ними объектов; выполнять действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме; устанавливать линейную зависимость или независимость систем векторов; находить базис и размерность векторных пространств и их подпространств, координаты векторов; решать типовые задачи.	Практические работы Проверочные работы Практический вопрос к экзамену (задача). Контрольная работа.	
ПК-4 способность использовать	Знает области приложения знаний по алгебре в	Контрольные вопросы	*Пороговый уровень:* может выполнять

Код и наименование компетенции	Компонент (знаниевый/функциональный)	Оценочные материалы	Критерии оценивания
возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемого учебного предмета	содержании школьного курса математики	Практические работы Контрольная работа	работы под контролем преподавателя. *Базовый уровень:* может выполнять работы самостоятельно. *Повышенный уровень:* готов выполнять работы в условиях учебно-воспитательного процесса с обучающимися.
	Может составить алгоритм решения задачи по алгебре для использования в учебном процессе и пояснить решение типовых школьных задач, подобрать задачи по теме с учетом сложности.		

2. Виды и характеристика оценочных средств

Текущий контроль осуществляется проверкой наличия конспектов лекций, собеседованием на коллоквиумах, решением задач, в том числе, с пояснением у доски, в ходе практических занятий и проверочных работ.

Промежуточная аттестация проходит в форме собеседования по вопросам к зачету или экзамену и решения контрольной работы.

1 семестр (экзамен) – собеседование билетам (теоретический вопрос и решение примера);

2 семестр (экзамен) – собеседование по вопросам и решение задачи;

3 семестр (экзамен) – собеседование билетам (теоретический вопрос и решение задачи) и решение контрольной работы.

Промежуточная аттестация может быть выставлена с учетом совокупности баллов, полученных обучающимся в рамках текущего контроля.

2.1. Практические работы

Задания на практических занятиях используются для оценки умений по отдельным темам дисциплины. Отчет оценивается в баллах 0-5.

Задания представляются в виде письменной работы или файла. При необходимости сопровождается дополнительными материалами, в том числе, мультимедийными.

Содержание отчета и критерии оценки ответа доводятся до сведения обучающихся в начале занятий. Оценка объявляется непосредственно после сдачи отчета и проверки по выполненному заданию на текущем или следующем занятии.

Балл	Критерий оценивания заданий
5	Задания выполнены правильно в полном объеме. Оформление соответствует всем требованиям. Может ответить на уточняющие вопросы. Решения задачи с пояснением у доски на хорошем методическом уровне.
3-4	Задания выполнены правильно и практически полностью. Оформление в основном соответствует всем требованиям. Может ответить на некоторые уточняющие вопросы. Решения задачи с пояснением у доски.
1-2	Задания выполнены частично правильно и не полностью. Оформление соответствует отдельным требованиям.

	С трудом может ответить на некоторые уточняющие вопросы. Решения задачи с пояснением у доски отсутствует
0	Задания не выполнены правильно, не может ответить на вопросы. У доски не работает.

2.2. Проверочные работы

Проверочные работы используются для оценки практических умений по решению задач, выявлению алгоритма задач и способности объяснить решение задачи, как основа для формирования профессиональных компетенций.

Отчет о выполнении заданий оценивается по 5-ти балльной системе. Критерии оценки ответа (табл.) доводятся до сведения обучающихся в начале занятий.

Балл	Критерий оценивания
"отлично"	Выполнил работу самостоятельно и без ошибок; допустил не более одного недочета; демонстрирует понимание способов и видов учебной деятельности по созданию алгоритма и программы; владеет терминологией и может прокомментировать этапы своей деятельности и полученный результат; может предложить другой способ деятельности или алгоритм выполнения задания.
"хорошо"	Выполнил работу самостоятельно и без ошибок; допустил не более двух (для простых задач) и трех (для сложных задач) недочетов; демонстрирует понимание способов и видов учебной деятельности по созданию алгоритма и программы; может прокомментировать этапы своей деятельности и полученный результат (например, дает комментарии о выполненных действиях при форматировании алгоритма ли листинга программы; затрудняется предложить другой способ деятельности или алгоритм выполнения задания.
"удовлетвори тельно"	Если студент правильно выполнил более 50% всех заданий и при этом: демонстрирует общее понимание способов и видов учебной деятельности по созданию алгоритма и программы; может прокомментировать некоторые этапы своей деятельности и полученный результат. Или при условии выполнения всей работы студент допустил: для простых задач – одну грубую ошибку или более четырех недочетов; для сложных задач – две грубые ошибки или более восьми недочетов. Сложным считается задание, которое естественным образом разбивается на несколько частей при его выполнении.
"неудовлетво рительно"	Допустил число ошибок и недочетов, превышающее норму, при которой может быть выставлена оценка «удовлетворительно»; правильно выполнил не более 10% всех заданий. Или не приступил к выполнению работы.

2.3. Коллоквиум

Коллоквиум в виде собеседования используется для проведения анализа материала лекций, самостоятельного углубления знаний, а также для самопроверки знаний студентов по отдельным вопросам и/или темам дисциплины. Ответ оценивается в баллах «2», «1» или «0». Критерии оценки ответа (табл.) доводятся до сведения обучающихся в начале занятий. Оценка объявляется в конце занятия.

Балл	Критерий оценивания
2	- показывает знание основных понятий темы, грамотно пользуется терминологией; - проявляет умение анализировать и обобщать информацию, навыки связного описания явлений и процессов; - демонстрирует умение излагать учебный материал в определенной логической последовательности;

	- показывает умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами; - демонстрирует сформированность и устойчивость знаний, умений и навыков; - могут быть допущены одна–две неточности при освещении второстепенных вопросов.
1	- неполно или непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения материала; - имелись затруднения или допущены ошибки в определении понятий, использовании терминологии, описании явлений и процессов, исправленные после наводящих вопросов; - выявлена недостаточная сформированность знаний, умений и навыков, студент не может применить теорию в новой ситуации.
0	- не раскрыто основное содержание учебного материала; - обнаружено незнание или непонимание большей или наиболее важной части учебного материала; - допущены ошибки в определении понятий, при использовании терминологии, в описании явлений и процессов, решении задач, которые не исправлены после нескольких наводящих вопросов; - не сформированы компетенции, отсутствуют соответствующие знания, умения и навыки.

2.4. Экзамен

Экзамен является средством проведения промежуточной аттестации во 1 и 3 семестре, проходит в форме собеседования по вопросам.

Допуском к экзамену в 3 семестре является контрольная работа.

Результаты освоения дисциплины во время экзамена оцениваются степенью полноты ответа на вопросы билета.

Оценка «отлично» (*повышенный уровень:* готов выполнять работы в условиях учебно-воспитательного процесса с обучающимися):

- Отлично знает основные понятия и доказательства фактов основных разделов курса (алгебраические структуры, линейная алгебра, алгебра многочленов).
- Умеет свободно применять методы алгебры к доказательству теорем и решению задач.
- Отлично знает области приложения знаний в содержании школьного курса математики
- Может доступно пояснить решение типовых школьных задач.
- Свободно отвечает на дополнительные вопросы.

Оценка «хорошо» (*базовый уровень:* может выполнять работы самостоятельно):

- Хорошо знает основные понятия и доказательства фактов основных разделов курса (алгебраические структуры, линейная алгебра, алгебра многочленов).
- Умеет применять методы алгебры к доказательству теорем и решению задач.
- Хорошо знает области приложения знаний в содержании школьного курса математики
- Может пояснить решение типовых школьных задач.
- Отвечает на большинство дополнительных вопросов.

Оценка «удовлетворительно» (*пороговый уровень:* может выполнять работы под контролем преподавателя):

- Знает отдельные понятия и доказательства фактов основных разделов курса (алгебраические структуры, линейная алгебра, алгебра многочленов).
- С трудом применяет методы алгебры к решению задач.
- С трудом может назвать области приложения знаний в содержании школьного курса математики

– Не может доступно пояснить решение типовых школьных задач.
– Затрудняется отвечать на дополнительные вопросы.

Экзамен (зачет) принимается преподавателем, проводившим занятия, или читающим лекции по данной дисциплине. В случае отсутствия ведущего преподавателя зачет принимается преподавателем, назначенным распоряжением заведующего кафедрой. С разрешения заведующего кафедрой на зачете может присутствовать преподаватель кафедры, привлеченный для помощи в приеме зачета.

Во время зачета обучающиеся могут пользоваться с разрешения ведущего преподавателя соответствующими техническими и программными средствами.

Время для подготовки 60 мин – для формулировки ответа на теоретический вопрос и решение задачи. Время ответа - не более 7-10 минут. Преподавателю предоставляется право задавать обучающимся дополнительные вопросы в рамках программы дисциплины. Общее время сдачи экзамена на 1 студента – 15 минут.

Нарушение дисциплины, списывание, использование обучающимися неразрешенных печатных и рукописных материалов, мобильных телефонов, коммуникаторов, планшетных компьютеров, ноутбуков и других видов личной коммуникационной и компьютерной техники во время зачета запрещено. В случае нарушения этого требования преподаватель обязан удалить обучающегося из аудитории и проставить ему в ведомости оценку «не зачтено».

Количественная оценка «отлично», «хорошо» или «удовлетворительно», внесенная в зачетную книжку и зачетно-экзаменационную ведомость, является результатом успешного усвоения учебного материала. Результат экзамена в зачетную книжку выставляется в день проведения в присутствии самого обучающегося. Преподаватели несут персональную ответственность за своевременность и точность внесения записей о результатах промежуточной аттестации в зачетно-экзаменационную ведомость и в зачетные книжки.

Если обучающийся явился на экзамен и отказался от прохождения аттестации в связи с неподготовленностью, то в зачетно-экзаменационную ведомость ему выставляется оценка в соответствии с набранными баллами в течение семестра.

Неявка на экзамен при условии нулевой аттестации в течение семестра отмечается в зачетно-экзаменационной ведомости словами «не явился».

Обучающимся, не сдавшим экзамен в установленные сроки по уважительной причине, индивидуальные сроки проведения экзамена определяются приказом ректора Университета. Обучающиеся, имеющие академическую задолженность, сдают экзамен в сроки, определяемые Университетом. Информация о ликвидации задолженности отмечается в экзаменационном листе. Допускается с разрешения деканата и досрочная сдача экзамена с записью результатов в экзаменационный лист.

Инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья могут сдавать экзамены в сроки, установленные индивидуальным учебным планом. Инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья, имеющие нарушения опорно-двигательного аппарата, допускаются на аттестационные испытания в сопровождении ассистентов-сопровождающих.

2.5. Контрольная работа

Контрольная работа в 3 семестре представляет собой решение типовых алгебраических задач (часть 1), а также проведение методического анализа содержательной части школьного предмета «Алгебра и начала анализа» и подбор школьных заданий различного уровня сложности (базовый, повышенный, творческий) по одной из понятийных линий (часть 2).

Выполнение и зачет по контрольной работе является допуском к экзамену.
По результатам оценки контрольной работы студенту ставится оценка «зачтено».

Оценка «ЗАЧТЕНО»:

- Знает основные понятия и доказательства фактов основных разделов курса (алгебраические структуры, линейная алгебра, алгебра многочленов).
- Знает области приложения знаний в содержании школьного курса математики
- Умеет применять методы алгебры к доказательству теорем и решению задач.
- Может пояснить решение типовых школьных задач.

Оценка «НЕ ЗАЧТЕНО»:

- Не знает большинство понятий и доказательств фактов основных разделов курса (алгебраические структуры, линейная алгебра, алгебра многочленов).
- Не может назвать области приложения знаний в содержании школьного курса математики
- Не умеет применять методы алгебры к доказательству теорем и решению задач.
- С трудом может пояснить решение типовых школьных задач.
- Затрудняется отвечать на дополнительные вопросы.

3. Оценочные средства

3.1. Вопросы к коллоквиуму

1 семестр

Вопросы к коллоквиуму 1. *«Группа, кольцо, поле»*

1. Бинарные алгебраические операции, их свойства. Примеры.
2. Группоид, полугруппа, моноид. Их свойства и примеры.
3. Группа, простейшие свойства, примеры.
4. Группы симметрий и подстановок. Примеры. Гомоморфизм и изоморфизм групп.
5. Кольцо простейшие свойства, примеры.
6. Поле, простейшие свойства, примеры. Гомоморфизм и изоморфизм колец и полей.
7. Какое место тема занимает в школьном курсе математики? Приведите примеры.

Вопросы к коллоквиуму 2. *«Поле комплексных чисел. Векторное пространство»*

1. Поле комплексных чисел.
2. Действия над комплексными числами в алгебраической форма записи.
3. Геометрическое представление комплексных чисел и операций над ними.
4. Представление комплексного числа в тригонометрической форме. Модуль и аргумент комплексного числа.
5. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме записи комплексного числа.
6. Определение и простейшие свойства векторных пространств. Примеры.
7. Подпространство. Критерий подпространства. Примеры.
8. Линейная оболочка системы векторов. Примеры.
9. Линейная зависимость и независимость системы векторов, свойства. Примеры.
10. Какое место тема занимает в школьном курсе математики? Приведите примеры.

2 семестр

Вопросы к коллоквиуму 1. *«Векторные пространства. Системы линейных уравнений»*

1. Линейная оболочка системы векторов. Примеры
2. Эквивалентные системы векторов, их свойства. Элементарные преобразования.
3. Базис конечной системы векторов. Ранг конечной системы векторов.\
4. Базис и размерность векторного пространства. Координаты вектора относительно заданного базиса. Примеры
5. Первоначальные сведения о системах линейных уравнений. Элементарные преобразования и равносильность систем линейных уравнений. Метод Гаусса.
6. Ступенчатые матрицы и вычисление ранга матрицы. Критерий совместности системы линейных уравнений. Примеры.
7. Свойства решений однородной и неоднородной систем линейных уравнений, связь между решениями этих систем.
8. Пространство решений однородной системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений. Примеры.
9. Какое место тема занимает в школьном курсе математики? Приведите примеры.

Вопросы к коллоквиуму 2. *«Определители. Матрицы и операции над ними»*

1. Подстановки, их чётность. Определители 2-го и 3-го порядка. Схема треугольников. Формулы Крамера.
2. Определитель n-го порядка, его свойства.
3. Минор. Алгебраическое дополнение. Разложение определителя по строке (по столбцу).
4. Операции над матрицами, их свойства. Векторное пространство матриц одинаковой размерности над полем F.
5. Кольцо квадратных матриц n-го порядка. Примеры.
6. Обратимые матрицы, их свойства. Критерий обратимости матрицы. Вычисление обратной матрицы с помощью приписывания единичной матрицы.
7. Вычисления обратной матрицы с помощью присоединенной. Матричные уравнения. Примеры.
8. Какое место тема занимает в школьном курсе математики? Приведите примеры.

3.2. Проверочные работы

1 семестр

Проверочная работа 1. *«Группа, кольцо, поле»*

Вариант 1

1. Определена ли на множествах $N, Z, Q, 2Z, 2\cdot Z+1$ следующая операция $a * b = \frac{a-b}{2}$?

В тех случаях, когда операция определена, будет ли она коммутативной, ассоциативной?

2. Является ли группой множество целых степеней числа 2 относительно умножения?

3. Является ли кольцом (полем) относительно сложения и умножения множество

$$K = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in Z\}?$$

4. Докажите, что любая группа, состоящая из трёх элементов абелева.

Вариант 2

1. Определена ли следующая операция $a * b = a - b + 1$ на множествах $N, Z, Q, 2{\cdot}Z, 2{\cdot}Z+1$? В тех случаях, когда операция определена, будет ли она коммутативной, ассоциативной?
2. Является ли группой множество всех целых чисел, делящихся на 3 относительно сложения?
3. Является ли кольцом (полем) относительно сложения и умножения множество
$$K = \{a - b\cdot\sqrt{3} \mid a, b \in Z\} \text{ ?}$$
4. Докажите, что если в группе $< G, \cdot >$ для каждого элемента выполняется равенство $a^2 = e$, то G – абелева ?

Проверочная работа 2. *«Метод математической индукции»*

1. Доказать методом математической индукции равенство: $1^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2$.
2. Доказать методом математической индукции неравенство: $3^m \geq 3\cdot m - 6\cdot$
3. Разложить по биному Ньютона: $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}\,)^5$

Проверочная работа 3. *«Действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме записи»*

Вариант 1

1. Решить квадратное уравнение: $x^2 - (4 + 3i)\cdot x + (1+5i) = 0$.
2. Вычислить в алгебраической форме записи: $\dfrac{(3+3i)^5}{(1+i)^3} + \dfrac{3-i}{1+i}$.
3. Вычислить в тригонометрической форме записи: а) $\dfrac{\left(\sqrt{3}-i\right)^{36}}{\left(1-i\right)^{24}}$; б) $\sqrt[8]{\dfrac{1-\sqrt{3}}{1-i}}$.
4. Какое множество точек комплексной плоскости задаётся условием: $| z + i | = | z - i |$?

Вариант 2

1. Решить квадратное уравнение: $x^2 - (3 + 7i)x - 10 + 11i = 0$.
2. Вычислить в алгебраической форме записи: $\dfrac{(2+2i)^6}{(1+i)^3} + \dfrac{2-i}{1-i}$.
3. Вычислить в тригонометрической форме записи: а) $\dfrac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^{30}}{\left(1-i\right)^{28}}$; б) $\sqrt[6]{\dfrac{\sqrt{3}-i}{-1+i}}$.
4. Какое множество точек комплексной плоскости задаётся условием: $| z - 2i | < | z - i |$?

Проверочная работа 4. *«Векторное пространство, подпространство, линейная оболочка» (тест)*

1. Какое из следующих множеств векторов плоскости, выходящих из начала координат образует векторное пространство?
   а) Все векторы, концы которых лежат на прямой $y = x+1$;
   б) Все векторы, концы которых образуют с данным ненулевым вектором a угол φ, $0 \leq \varphi \leq \pi$;
   в) Все векторы, концы которых лежат на биссектрисе II и IV координатных углов.

г) Все векторы, концы которых лежат на прямых $y = x$ и $y = -x$.

2. Какое из утверждений верное?

а) Множество рациональных чисел является подпространством в векторном пространстве комплексных чисел над полем рациональных чисел;

б) $\mathbf{R}^2$ является подпространством в $\mathbf{R}^3$;

в) $\{L = (1, \beta) \mid \beta \in R\}$ - подпространство в $\boldsymbol{R}^2$;

г) $\{L = (\alpha, \beta, 4) \mid \alpha, \beta \in R\}$ - подпространство в $\boldsymbol{R}^3$.

3. Какой из данных векторов является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a} = (0, 1, 0)$ и $\boldsymbol{b} = (1, 0, 0)$: **а)** (2, 2, 1); **б)** $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$; **в)** (1, -1, 1); *г)* (2, 2, 2).

4. Какое из множеств в $\boldsymbol{R}^3$ является линейной оболочкой векторов $\boldsymbol{a}$ = (1, 0, 0) и $\boldsymbol{b}$ = (0, 2, 0) ? **а)** $A = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in R\}$; **б)** $B = \{(\alpha, 2, 0) \mid \alpha \in R\}$; **в)** $C = \{(\alpha, 2, 0) \mid \alpha \in R\}$;

г) $D = \{(1, 2, 0) \mid \alpha \in R\}$.

5. Какое из множеств является подмножеством линейной оболочки векторов $\boldsymbol{a}$ = (1, 0) и $\boldsymbol{b}$ = (2, 0)? **а)** $A = \{(0,0), (\sqrt{2}, 0)\}$; **б)** $B = \{(0, \alpha), \alpha \in Z\}$; **в)** $C = \{(1, 2)\}$.

6. Какая из систем в R^3 является линейно независимой?

1. $a = (0, 0, 3)$, $b = (0, 2, 3)$, $c = (1, 0, 3)$;

2. $a = (1, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0)$, $c = (0, 0, 0)$;

3. $a = (1, 2, 3)$, $b = (1, 0, 0)$, $c = (2, 2, 3)$;

4. $a = (1, 2, 1)$, $b = (0, 2, 3)$, $c = (2, 4, 2)$.

Проверочная работа 5. *«Линейная зависимость, базис и ранг конечной системы векторов. Базис векторного пространства»*

Вариант 1

1. Пользуясь элементарными преобразованиями установить линейную зависимость или независимость системы векторов. Найти один из базисов, вычислить ранг, выразить небазисные векторы через выбранный базис: $a_1 = (1, 2, 1)$; $a_2 = (3, 0, -1)$; $a_3 = (5, -2, -3)$.

2. Дополнить до базиса систему векторов (a_1, a_2), заданную в пространстве R^4.

$a_1 = (1, 3, 5, 4)$; $a_2 = (2, 4, 1, 2)$.

3. Проверить образует ли система векторов (1) (a_1, a_2, a_3) базис в R^3 и найти координаты вектора x в этом базисе *(1)* $a_1 = (1, 1, 1)$; $a_2 = (1, 1, 2)$; $a_3 = (1, 2, 3)$; $x = (6, 9, 14)$.

Вариант 2

1. Пользуясь элементарными преобразованиями установить линейную зависимость или независимость системы векторов. Найти один из базисов, вычислить ранг, выразить небазисные векторы через выбранный базис: $\boldsymbol{a}_1 = (-1, 1, 2)$; $\boldsymbol{a}_2 = (2, 1, 0)$; $\boldsymbol{a}_3 = (5, 1, -2)$.

2. Дополнить до базиса систему векторов $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, заданную в пространстве $\boldsymbol{R}^4$.

$\boldsymbol{a}_1 = (2,1, 3, 2)$; $\boldsymbol{a}_2 = (1, 3, 2, 4)$.

3. Проверить образует ли система векторов *(*1) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ базис в R^3 и найти координаты вектора x в этом базисе *(1)*: $\boldsymbol{a}_1 = (2,1, -3)$; $\boldsymbol{a}_2 = (3, 2, -5)$; $\boldsymbol{a}_3 = (1, -1, 1)$; $\boldsymbol{x} = (6, 2, -7)$.

Проверочная работа 6. «*Евклидовы пространства*»

1. Станет ли арифметическое пространство R^2 евклидовым, если скалярное произведение ввести по формуле: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = |x_1|\cdot|y_1| + |x_2|\cdot|y_2|$, где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$; $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$?

2. Показать, что векторы $\boldsymbol{e_1} = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ и $\boldsymbol{e_2} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ образуют ортонормированный базис в двухмерном евклидовом пространстве и найти координаты вектора $\boldsymbol{a} = (3,4)$ в этом базисе.

3. Базис $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_4}, \boldsymbol{e_5})$ – ортонормированный $\boldsymbol{x} = 2\cdot\boldsymbol{e_1}+3\cdot\boldsymbol{e_2}-3\cdot\boldsymbol{e_3}$, $y = \boldsymbol{e_5} - 2\cdot\boldsymbol{e_3}$. Найти: (x, y), $||x||$, $||y||$.

4. Найти нормированный вектор, ортогональный векторам: $\boldsymbol{a_1} = (1,1,1)$, $\boldsymbol{a_2} = (1,-1,1)$, $\boldsymbol{a_3} = (2,1,1)$.

5. Найти ортонормированный базис линейной оболочки векторов $\boldsymbol{a_1} = (2,1,3,-1)$, $\boldsymbol{a_2} = (7,4,3,-3)$, $\boldsymbol{a_3} = (1,1,-6,0)$, $\boldsymbol{a_4} = (5,7,7,8)$.

6. $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ – ортонормированный базис, $\boldsymbol{x} = 5\cdot\boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_3}$. Найти угол между векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

7. $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_4})$ – ортогональный базис, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2} - 4\cdot\boldsymbol{e_4}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e_1}+2\cdot\boldsymbol{e_3} + \boldsymbol{e_4}$, $\|e_1\| = 2$; $\|e_2\| = 3$; $\|e_3\| = 1$; $\|e_4\| = 1$. Найти угол между векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

2 семестр

Проверочная работа 1. «*Матрицы и определители*»

Вариант 1

I уровень

Заполнить пропуски:

1.1. Произведение матриц $A_{3\times 2}$ и $B_{2\times 4}$ равно матрице C размерности …, её элемент c_{23} находится по правилу … .

1.2. Множество матриц … образует векторное пространство над …

1.3. Произведение $a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}\cdot a_{44}$ входит в определитель … порядка со знаком …

1.4. Разложение определителя $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ по второму столбцу имеет вид …

Определить истинно или ложно утверждение:

1.5. Матрица, определитель которой равен 2, обратима.

1.6. Определитель не изменится, если одну из строк умножить на ненулевое число и прибавить к ней другую строку.

1.7. Алгебраическое дополнение элемента a_{21} единичной матрицы $E_{3\times 3}$ равно: 1) 0; 2) 1; 3) -1. Указать номер правильного ответа.

II уровень

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

2.1. Решить матричное уравнение $A\cdot X = B$

2.2. Вычислить определитель матрицы С.

2.3. Решить систему линейных уравнений (1) с помощью правила Крамера.

$$(1)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ \quad - x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

III уровень

3.1. Решить уравнение (2).

Вариант 2

I уровень

Заполнить пропуски:

1.1. Произведение матриц $A_{2\times 4}$ и $B_{4\times 3}$ равно матрице C размерности …, её элемент c_{21} находится по правилу … .

1.2. Множество … матриц … образует кольцо.

1.3. Произведение $a_{13}\cdot a_{24}\cdot a_{32}\cdot a_{41}$ входит в определитель … порядка со знаком …

1.4. Разложение определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ по третьему столбцу имеет вид …

Определить истинно или ложно утверждение:

1.5. Матрица $A_{3\times 3}$, ранг которой равен 2, обратима.

1.6. Общий множитель элементов определителя можно вынести за знак определителя.

1.7. Элемент b_{12} матрицы $B = A^{-1}_{3\times 3}$ можно вычислить по формуле: 1) $b_{12} = A_{12} : |A|$;

2) $b_{12} = A_{21} : |A|$; 3) $b_{12} : |A|$. (A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} невырожденной матрицы A). Указать номер правильного ответа.

II уровень

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

2.1. Решить матричное уравнение $A\cdot X = B$

2.2. Вычислить определитель матрицы C.

2.3. Решить систему (1) линейных уравнений с помощью правила Крамера.

$$(1)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \\ \quad - x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

IIIуровень

3.1. Числа 20927, 53227, 20604, 25755, 289 делятся на 17. Доказать, что определитель Δ также делится на 17, не вычисляя его.

Проверочная работа 2. “*Векторные пространства*”

Вариант 1

1. Проверьте образует ли векторное пространство следующая алгебра: **а)** множество всех геометрических векторов плоскости, выходящих из точки O, лежащих на осях координат с обычными операциями сложения и умножения на действительные числа. **b)** Образует ли подпространство в $\boldsymbol{R^3}$ множество: $A = \{(2, b, c) \mid b, c \in R\}$?

2. Какое из данных множеств является подмножеством линейной оболочки векторов $\boldsymbol{a} = (1,2)$ и $\boldsymbol{b} = (3,6)$: **a)** $A = \{ (1,2), (2,6)\}$; **b)** $B = \{(x, y)| \ x, y \in Z$ и $y = 2x\}$; **c)** $C = \{(x, y) \mid x, y \in Q$ и $x = 2y\}$?
3. Пользуясь элементарными преобразованиями установить линейную зависимость или независимость системы векторов. Найти один из базисов, вычислить ранг, выразить небазисные векторы через выбранный базис: $\boldsymbol{a_1} = (1,3,2)$; $\boldsymbol{a_2} = (1,2,0)$; $\boldsymbol{a_3} = (1,1,-2)$.
4. Дополнить до базиса систему векторов $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})$, заданную в пространстве $\boldsymbol{R}^4$.

$$\boldsymbol{a_1} = (-1,2,4,3); \quad \boldsymbol{a_2} = (3,2,4,5).$$

5. Проверить образует ли система векторов (1) $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3})$ базис в $\boldsymbol{R}^3$ и найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в этом базисе (1). $\boldsymbol{a_1} = (1,2,1)$; $\boldsymbol{a_2} = (2,1,0)$; $\boldsymbol{a_3} = (1,1,-2)$; $\boldsymbol{x} = (6,5,-1)$.

Вариант 2

1. **а)** Проверьте образует ли векторное пространство следующая алгебра: **а)** множество всех геометрических векторов плоскости, выходящих из точки O, лежащих на прямых $y=5\cdot x$ и $y=7\cdot x$ с операциями сложения и умножения на действительные числа. **b)** Образует ли подпространство в $\boldsymbol{R}^3$ множество: $A = \{ (b, c)| \ b, c \in \boldsymbol{R}\}$?
2. Какое из данных множеств является подмножеством линейной оболочки векторов $\boldsymbol{a} = (1,0)$ и $\boldsymbol{b} = (2,0)$. **a)** $A = \{(0,0), (\sqrt{2}, 0)\}$; **b)** $B = \{(0, y)| \ y \in Z \}$; **c)** $C = \{(1,2)\}$?
3. Пользуясь элементарными преобразованиями установить линейную зависимость или независимость системы векторов. Найти один из базисов, вычислить ранг, выразить небазисные векторы через выбранный базис: $\boldsymbol{a_1} = (1,-2,1)$; $\boldsymbol{a_2} = (-1,1,0)$; $\boldsymbol{a_3} = (-3,4,-1)$.
4. Дополнить до базиса систему векторов $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})$, заданную в пространстве $\boldsymbol{R}^4$.

$$\boldsymbol{a_1} = (-2,0,1,2); \quad \boldsymbol{a_2} = (1,3,1,2).$$

5. Проверить образует ли система векторов (1) $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3})$ базис в $\boldsymbol{R}^3$ и найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в этом базисе (1): $\boldsymbol{a_1} = (2,1,-3)$; $\boldsymbol{a_2} = (3,2,-5)$; $\boldsymbol{a_3} = (1,-1,1)$; $\boldsymbol{x} = (6,2,-7)$.

Проверочная работа 3. *«Системы линейных уравнений»*

Вариант 1

1. Исследуйте систему на совместность и определите количество решений системы (1):

$$(1)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

Найти базис направляющего подпространства и вектор сдвига линейного многообразия решений системы линейных уравнений.

2. Как изменится число решений системы (1), если к ней добавить уравнение

$$5\cdot x_1 - 5\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = 8\ ?$$

3. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ tx_1 + x_2 - tx_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$?

Вариант 2

1. Исследуйте систему на совместность и определите количество решений системы (1):

$$(1)\ \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Найти базис направляющего подпространства и вектор сдвига линейного многообразия решений системы линейных уравнений.

2. Как изменится число решений системы (1), если к ней добавить уравнение

$$3 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 - 2 \cdot x_4 = 7\ ?$$

3. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + tx_3 = 1 \\ tx_1 + x_2 = t \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$?

Проверочная работа 4. *«Обратная матрица, матричные уравнения»*

Вариант 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Вычислите A^{-1} и сделать проверку.

2. Решите матричное уравнение $A \cdot X = B$.

3. Найдите обратную матрицу. При каких ограничениях на параметры матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ обратима**.**.

Вариант 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Вычислите A^{-1} и сделать проверку.

2. Решите матричное уравнение $A \cdot X = B$.

3. Найдите обратную матрицу. При каких ограничениях на параметры матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ обратима.

Проверочная работа 5. *«Векторные пространства. Системы линейных уравнений. Матрицы и определители»*

Вариант 1

1. Вычислите ранг системы векторов и определите является ли система линейно зависимой: $\mathbf{a_1}$ = (–1, 2, 1, –1, 7), $\mathbf{a_2}$ = (2, 4, 3, 0, 6), $\mathbf{a_3}$ = (3, 6, 3, –3, 21), $\mathbf{a_4}$ = (4, 8, 6, 0, 12).

2. Решите систему $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ \quad - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$ **а)** методом Гаусса; **б)** по формулам Крамера; **в)** матричным методом.

3. Вычислите произведение матриц: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Найдите A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Вариант 2

1. Вычислите ранг системы векторов и определите, является ли система линейно зависимой: **a₁** = (1, 3, –1, 1, 2), **a₂** = (2, 6, –3, 0,2), **a₃** = (3, 18, –3, 3, 6), **a₄** = (4, 12, –6, 0, 4) ?

2. Решите систему $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ \quad - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$ **а)** методом Гаусса; **б)** по формулам Крамера; **в)** матричным методом.

3. Вычислите произведение матриц: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Найдите A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

3 семестр

Проверочная работа 1. *«Линейные операторы»*

Вариант 1

1. Будет ли отображение $\varphi\ (\ x_1,\ x_2,\ x_3\ ) = (\ x_1 - x_2\ ,\ 0,\ x_1 - x_3\ )$ линейным оператором векторного пространства $\boldsymbol{R}^3$. Определите его матрицу, дефект, ранг, постройте базисы ядра и образа.

2. Линейное отображение φ векторного пространства $\boldsymbol{R}^3$ имеет в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ матрицу $A_1^{\phi} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Какова матрица φ в базисе $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$, если $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{e}_1 + 2 \cdot \boldsymbol{e}_3$?

3. Укажите какой-либо базис ядра и базис образа линейного оператора пространства $\boldsymbol{R}^3$:

$$\varphi(\ x_1, x_2, x_3\ ) = (x_1 - x_2\ , x_1 - x_2\ , x_3)$$

4. В пространстве $\boldsymbol{R}^3$ найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора θ, заданного матрицей $A_1^{\theta} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Вариант 2

1. Будет ли отображение $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, -3 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3, x_2 - x_3)$ линейным оператором векторного пространства $\boldsymbol{R^3}$. Определите его матрицу, дефект, ранг, постройте базисы ядра и образа.

2. Линейное отображение φ векторного пространства $\boldsymbol{R^3}$ имеет в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ матрицу $A_1^{\phi} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Какова матрица φ в базисе $\{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3}\}$, если $\boldsymbol{f_1} = \boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{f_2} = \boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{f_3} = 2 \cdot \boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2} + 3 \cdot \boldsymbol{e_3}$?

3. Укажите какой-либо базис ядра и базис образа линейного оператора пространства R^3:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1, 0)$$

4. В пространстве $\boldsymbol{R^3}$ найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора θ, заданного матрицей $A_1^{\theta} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Проверочная работа 2. *"Многочлены от одной переменной"*

1. Найдите степень многочлена $f(x) = (-x+1) \cdot (x^2+1) + (x^2-1) \cdot (x+1) - 2x + 1$.

2. Найти частное и остаток от деления $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + 1$ на $g(x) = -x^3 + 3x^2 - x + 5$.

3. Разложите многочлен $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + 1$ по степеням двучлена $x + 2$.

4. Вычислите значение многочлена $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x + 5$ в точке $\alpha = -2$.

5. Разделите многочлен $2x^5 - 3x^3 + 1$ с остатком на $x + 3$.

6. Разложите многочлен $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + 1$ по степеням двучлена $x + 2$.

7. Найдите *НОД* и *НОК* многочленов $f(x) = 2x^3 - 3x + 2$, $g(x) = -3x^2 + 2x - 1$.

Проверочная работа 3. *"Многочлены от нескольких переменных", "Многочлены над полями Q, R, C"*

1. Выразите многочлен $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1^2 \cdot x_2^2 - x_1^2 \cdot x_3^2 - x_2^2 \cdot x_3^2$ через основные симметрические многочлены.

2. Найдите многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющий простой корень $-i$ и двукратный корень 2.

3. Решите уравнение $x^3 - 3 \cdot x^2 + 9 \cdot x - 7 + 6 \cdot i = 0$.

4. Найдите все рациональные корни уравнения $x^4 - x^2 + x - 10 = 0$.

5. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби: $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{3\sqrt[3]{25} + 3\sqrt[3]{5} + 1}$.

3.3. Вопросы к экзамену

Вопросы к экзамену (1 семестр)

1. Бинарные алгебраические операции, их свойства. Примеры.
2. Группоид, полугруппа, моноид. Их свойства и примеры.
3. Группа, простейшие свойства, примеры.

4. Группы симметрий и подстановок. Примеры. Гомоморфизм и изоморфизм групп.
5. Кольцо простейшие свойства, примеры.
6. Поле, простейшие свойства, примеры. Гомоморфизм и изоморфизм колец и полей.
7. Поле комплексных чисел.
8. Действия над комплексными числами в алгебраической форма записи.
9. Геометрическое представление комплексных чисел и операций над ними.
10. Представление комплексного числа в тригонометрической форме. Модуль и аргумент комплексного числа.
11. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме записи комплексного числа.
12. Определение и простейшие свойства векторных пространств. Примеры.
13. Подпространство. Критерий подпространства. Примеры.
14. Линейная оболочка системы векторов. Примеры.
15. Линейная зависимость и независимость системы векторов, свойства. Примеры.
16. Эквивалентные системы векторов. Элементарные преобразования конечной системы векторов. Примеры.
17. Базис конечной системы векторов. Ранг конечной системы векторов. Примеры.
18. Базис и размерность векторного пространства. Примеры.
19. Теорема единственности разложения по базису. Координаты вектора относительно заданного базиса. Примеры.

Задачи к экзамену (1 семестр)

1. Определены ли на множествах $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{2{\cdot}Z}$, $\boldsymbol{2{\cdot}Z+1}$ следующие операции:

$$a)\ < a, b > \to a - b; \quad b)\ < a, b > \to \frac{a+b}{2}.$$

2. Какими свойствами обладают бинарные алгебраические операции на множестве R?

$$a)\ < a, b > \to a - b; \quad b)\ < a, b > \to \frac{a+b}{2}$$

3. Решите уравнение $\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}$ в группе S_3.

4. Образует ли множество подстановок $\left\{ \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,3\,4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,3\,4 \end{pmatrix} \right\}$ подгруппу в группе S_4 ?

5. Является ли данное отображение f гомоморфным ? $f\colon \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(<a, b>) = a$.

6. Докажите, что следующие кольца изоморфны: $<Q,+,\cdot>$ и $< \left\{ \begin{pmatrix} a\,o \\ o\,o \end{pmatrix}, где\ \ a \in Q \right\} ,+,\ \cdot>$.

7. Решите уравнения (в поле комплексных чисел):
$\boldsymbol{a)}$ $x^2+3{\cdot}x+4{\cdot}i=0;$ $\boldsymbol{b)}$ $x^2-5{\cdot}x+12{\cdot}i=0;$ $\boldsymbol{c)}$ $x^2-(4+3{\cdot}i){\cdot}x+1+5i = 0$

8. Решите систему уравнений: $\begin{cases} ix + (1+i)y = 3 - i, \\ (1-i)x - (6-i)y = 4 \end{cases}$

9. Представьте в тригонометрической форме числа: $1,\ -1,\ i,\ -i,\ 1-i,\ -1-i,\ -1-\sqrt{3}\cdot i,$ $\sqrt{3}-i$

10. Вычислите $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10}$, $\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{20}$.

11. Вычислите $\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{3}+i}{-1+i}}$

12. Решите уравнение: $x^4+1+i\sqrt{3}=0.$

13. На комплексной плоскости изобразите все точки, изображающие числа $z \in \boldsymbol{C}$, со свойствами: ***a)*** $|z| \geq 1$; ***b)*** $arg\, z = \frac{\pi}{3}$; ***c)*** $|z + i| = 3$; ***d)*** $|z - i| < |z + 2 - 3i|$; ***e)*** $z^3 = -i$; ***k)*** $\begin{cases} |z - i| = 1 \\ arg\, z = \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

14. На комплексной плоскости найдите все точки, изображающие значения $\sqrt[3]{1-i}$.

15. Вычислите ранг и проверьте линейную независимость системы векторов:
а) $\boldsymbol{a_1} = (1, 3, -1, 1, 2)$, $\boldsymbol{a_2} = (2, 6, -3, 0, 2)$, $\mathbf{a_3} = (3, 18, -3, 3, 6)$, $\boldsymbol{a_4} = (4, 12, -6, 0, 4)$.

Вопросы к экзамену (2 семестр)

1. Линейная оболочка системы векторов. Примеры
2. Эквивалентные системы векторов, их свойства. Элементарные преобразования.
3. Базис конечной системы векторов. Ранг конечной системы векторов.
4. Базис и размерность векторного пространства. Координаты вектора относительно заданного базиса. Примеры
5. Первоначальные сведения о системах линейных уравнений. Элементарные преобразования и равносильность систем линейных уравнений. Метод Гаусса.
6. Ступенчатые матрицы и вычисление ранга матрицы. Критерий совместности системы линейных уравнений. Примеры.
7. Свойства решений однородной и неоднородной систем линейных уравнений, связь между решениями этих систем.
8. Пространство решений однородной системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений. Примеры.
9. Подстановки, их чётность. Определители 2-го и 3-го порядка. Схема треугольников. Формулы Крамера.
10. Определитель n-го порядка, его свойства.
11. Минор. Алгебраическое дополнение. Разложение определителя по строке (по столбцу).
12. Операции над матрицами, их свойства. Векторное пространство матриц одинаковой размерности над полем F.
13. Кольцо квадратных матриц n-го порядка. Примеры.
14. Обратимые матрицы, их свойства. Критерий обратимости матрицы. Вычисление обратной матрицы с помощью приписывания единичной матрицы.
15. Вычисления обратной матрицы с помощью присоединенной. Матричные уравнения. Примеры.

Задачи к экзамену (2 семестр)

Тема 1: «Векторные пространства»

1. Является ли вектор $c = (3, 8, 11)$ линейной комбинацией векторов $a = (0, 1, 1)$ и $b = (1, 2, 3)$?
2. Записать общий вид элементов линейной оболочки, натянутой на систему векторов $\vec{a} = (1, 2)$ и $b = (2, 4)$ и дать ей геометрическое истолкование.
3. Выяснить линейно-зависима или линейно-независима система векторов, найти её ранг:

a) $a_1 = (1,2,3,1)$; $a_2 = (2,3,1,2)$; $a_3 = (3,1,2,-2)$; $a_4 = (0,4,2,5)$.

b) $a_1 = (-1,3,3,2,5)$; $a_2 = (-3,5,2,3,4)$; $a_3 = (-3,1,-5,0,-7)$; $a_4 = (-5,7,1,4,1)$.

4. Проверить, образует ли каждая из следующих систем векторов базис пространства R^3 и найти координаты вектора x в каждом из этих базисов.

a) $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,1,2)$, $e_3 = (1,-2,3)$, $x = (6,9,14)$

b) $e_1 = (2,1,-3)$, $e_2 = (3, 2, -5)$, $e_3 = (1,-1,1)$, $x = (6, 2, -7)$

5. Дополнить до базиса систему векторов, заданных в пространстве R^4:

a) $a_1 = (2, 3, 4, 5)$; $a_2 =(4, 6,1,8)$;

b) $a_1 = (1, 3,4,5)$; $a_2 =(3, 8,1, 2)$.

Тема 2: “Системы линейных уравнений”

6. Исследовать систему на совместность:

$$(1)\ \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 7x_1 + 10x_2 - 5x_3 = 2 \end{cases}$$

7. Исследуйте систему на совместность и определите количество решений системы (2):

$$(2)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

8. Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$a)\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}; \quad b)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

9. Найти базис (фундаментальную систему решений) и размерность линейного пространства решений системы линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Тема 3: «Определители»

10. Вычислить количество инверсий в перестановке (3, 4, 2, 1,5). Будет ли она чётной?

11. Какие значения должны принимать i и k, чтобы произведение $a_{17}\ a_{23}\ a_{31}\ a_{4i}\ a_{54}\ a_{66}\ a_{7k}\ a_{82}\ a_{99}$ входило в определитель девятого порядка *a)* со знаком “плюс”, *b)* со знаком “минус”?

12. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}$; *в)* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

13. Решить систему с помощью правила Крамера:

$$а)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}; \quad б)\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4 \\ x_2 + 9x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

Тема 4: «Операции над матрицами»

14. Вычислить произведение матриц: а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

15. Вычислить матрицу обратную данной: а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

16. Решить систему в матричным способом: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$.

Вопросы к экзамену (3 семестр)

1. Линейные операторы: определение, примеры и свойства.
2. Ядро и образ линейного оператора, дефект и ранг.
3. Теорема о сумме ранга и дефекта. Матрица линейного оператора.
4. Связь между координатными столбцами x и $\varphi(x)$. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису. Подобие матриц.
5. Действия над линейными операторами и их матрицами.
6. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов
7. Кольцо многочленов от одного переменного.
8. Теорема о делении многочленов с остатком.
9. Значения многочлена в точке. Теорема Безу. Корни многочлена.
10. Формулы Виета и их применение.
11. Схема Горнера: вычисление значений многочлена, деление на двучлен, разложение по степеням двучлена.
12. *НОД* многочленов, его свойства и алгоритм Евклида.
13. Линейное разложение НОД. *НОК* многочленов и его свойства.
14. Целые и рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами.
15. Кольцо многочленов от нескольких переменных.
16. Симметрические многочлены: определение, свойства, примеры.
17. Лексикографическое упорядочение членов многочленов. Определение, свойства, примеры.
18. Основная теорема о симметрических многочленах: представление в виде многочлена от симметричных многочленов.

Задачи к экзамену (3 семестр)

1. Будет ли отображение $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, -3 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3, x_2 - x_3)$ линейным оператором векторного пространства $\boldsymbol{R}^3$?. Определите его матрицу, дефект, ранг, постройте базисы ядра и образа.

2. Линейное отображение φ векторного пространства $\boldsymbol{R}^3$ имеет в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ матрицу $A_I^{\phi} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу отображения φ в базисе $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$, если $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{f}_3 = 2 \cdot \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 3 \cdot \boldsymbol{e}_3$.

3. Укажите какой-либо базис ядра и базис образа линейного оператора пространства $\boldsymbol{R}^3$: $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1, 0)$.

4. Найдите степень многочлена $f(x) = (-x+1)\cdot(x^2+1) + (x^2-1)\cdot(x+1) - 2x + 1$.
5. Найдите частное и остаток от деления $f(x) = 2x^5-3x^3+1$ на $g(x) = -x^3+3x^2-x+5$.
6. Разложите многочлен $f(x) = 2x^5-3x^3+1$ по степеням двучлена $x + 2$.
7. Вычислите значение многочлена $f(x) = -x^3+ 3x^2 - x + 5$ в точке $\alpha = -2$.
8. Разделите многочлен $2x^5-3x^3+1$ с остатком на $x + 3$.
9. Разложите многочлен $f(x) = 2x^5-3x^3+1$ по степеням двучлена $x + 2$.
10. Найдите *НОД* и *НОК* многочленов $f(x) = 2x^3-3x+2$, $g(x) = -3x^2+2x-1$.
11. Найдите линейное разложение *НОД* многочленов $2x^3-3x+2$, $-3x^2+2x-1$.
12. Найдите многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющий простой корень $-i$ и двукратный корень 2.
13. Найдите все рациональные корни многочлена $f(x) = x^3+x^2-5x+3$.
14. Найдите кратности корней многочлена $f(x) = x^3+x^2-5x+3$.
15. Упорядочьте многочлен лексикографически: $1 - x^4 + x\cdot y\cdot z - x^2\cdot y\cdot z^3 + 2\cdot x^2 - y^3\cdot z + 3\cdot z^4$.
16. Выразите симметрический многочлен через элементарные симметрические:

$$x^2\cdot y^2 + x^2\cdot z^2 + y^2\cdot z^2 .$$

17. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $1/(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - 1)$.
18. Найдите сумму кубов корней уравнения $2\cdot x^2 - x - 5 = 0$
19. Найдите многочлен с рациональными коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}$.

3.5. Контрольная работа

Контрольная работа в 3 семестре представляет собой комплексную работу:
1) Решение алгебраических задач.
2) Проведение методического анализа содержательной части школьного предмета «Алгебра и начала анализа» и подбор школьных заданий различного уровня сложности (базовый, повышенный, творческий) по одной из понятийных линий.

Выполнение и зачет по контрольной работе является допуском к экзамену.

По результатам оценки контрольной работы студенту ставится оценка «зачтено».

1 часть

1. Будет ли линейным оператором векторного пространства R^3 отображение $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, x_2+x_3, x_2 - x_3)$. Определить его матрицу, дефект, ранг, построить базисы ядра и образа.

2. Найти частное и остаток от деления многочлена $8\cdot x^3 - 3\cdot x^2 + 5\cdot x + 4$ на $x - 3$.

3. Пользуясь схемой Горнера, разложить многочлен $3\cdot x^4 + 8\cdot x^3 - 2\cdot x^2 + 6\cdot x - 5$ по степеням $x + 3$, найти значение многочлена и значения его производных при $x = -3$.

4. Для многочлена $x^4 - 5\cdot x^3 + 9\cdot x^2 - 7\cdot x + 2$ найти кратность корня $x = 1$.

5. Вычислить $НОД(2\cdot x^3 - 7\cdot x^2 - 5\cdot x + 29,\quad 2\cdot x^2 - 11\cdot x + 16)$ и его линейное разложение.

6. Найти все рациональные корни уравнения $x^4 - x^2 + x - 10 = 0$.

7. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби: $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{3\sqrt[3]{25} + 3\sqrt[3]{5} + 1}$.

2 часть

1. Сделайте анализ школьных учебников по предмету «Алгебра и начала анализа»: не менее 5 авторских линеек, (например, линейки А.Г. Мордковича, Ю.Н. Макарычева, А.Г. Мерзляка, А.Н. Колмогорова и др.), рекомендованных для использования в школе, не старше 5 лет, по одной из категорий (тем) предметной области «Алгебра» (по вариантам).

2. Отчет структурируйте: авторы, класс, тип учебника (общеобразовательный или профильный), тема, основные понятия, уровень сложности материала, наличие примеров и задач различного уровня сложности с примерами, особенности.

3. Сделайте подбор примеров и задач по уровням сложности: не менее 20 примеров и не менее 10 задач на каждый уровень (базовый, повышенный, творческий). Подборку сделать для конкретного класса.

Вариант	Понятийная линия (тема) алгебры
1.	Бинарные алгебраические операции, их свойства
2.	Определение и простейшие свойства векторных пространств
3.	Базис и размерность векторного пространства. Координаты вектора относительно заданного базиса
4.	Первоначальные сведения о системах линейных уравнений. Элементарные преобразования и равносильность систем линейных уравнений. Метод Гаусса.
5.	Операции над матрицами, их свойства.
6.	Линейные операторы: определение, примеры и свойства
7.	Действия над линейными операторами и их матрицами
8.	Собственные векторы и собственные значения линейных операторов
9.	Кольцо многочленов от одного переменного
10.	Значения многочлена в точке. Теорема Безу. Корни многочлена
11.	Формулы Виета и их применение
12.	Схема Горнера: вычисление значений многочлена, деление на двучлен, разложение по степеням двучлена
13.	*НОД* многочленов, его свойства и алгоритм Евклида

3.6. Методические указания к решению проверочных и контрольных работ

Задачи на овладение основными понятиями и фактами в области комплексных чисел и действий над ними

В качестве материала для построения новой системы чисел возьмём точки плоскости $C=\{(x, y): x, y \in R\}$, каждая из которых однозначно определяется упорядоченной парой действительных чисел. Введём операции сложения и умножения для таких элементов следующим образом:

$$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d);$$
$$(a, b)\cdot(c, d)=(ac-bd, cd+bc).$$

Множество C с введёнными операциями сложения и умножения образует поле комплексных чисел.

Между декартовыми и полярными координатами существует следующая связь, справедливая при любом расположении точек на плоскости:

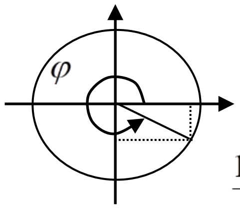
$$a=r\cos\varphi, \quad b=r\sin\varphi.$$

Для произвольного комплексного числа α имеем:

$$\alpha=a+bi=r\cos\varphi+r\sin\varphi\, i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Задание 1. Найти тригонометрическую форму числа $\sqrt{3}-i$.

Решение. Здесь $a=\sqrt{3}$, $b=-1$. Тогда $r=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(-1\right)^2}=2$.



$\frac{11}{6}\pi$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $\varphi = \frac{11}{6}\pi$. Таким образом

$$\sqrt{3} - 1 = 2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right).$$

Формулы Муавра:

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right).$$

Задание 2. Вычислить $(1+i)^4$.

Решение. $(1+i)^4 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -4.$

Задание 3. Вычислить $\xi = \sqrt{-i}$.

Решение. Найдём тригонометрическую форму числа $-i$:

$$-i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}.$$

Тогда $\xi = \sqrt{\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}} = \cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2}$.

При $k = 0$ имеем: $\xi_0 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

При $k = 1$: $\xi_1 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задание 4. Вычислить $\xi = \sqrt[3]{8}$.

Решение. В тригонометрической форме $8 = 8\cdot(\cos 0 + i\sin 0)$.

$\xi = \sqrt[3]{8(\cos 0 + i\sin 0)} = 2\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right).$

$k = 0$: $\xi_0 = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2$;

$k = 1$: $\xi_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} + i$;

$k = 2$: $\xi_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} - i$.

Задачи на овладение основными понятиями и фактами в области решения систем линейных уравнений, действий над матрицами и вычисления определителей

Задание 1: Вычислить определители: 1) $\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 8 & -2 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение: 1) $\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -2\cdot 8 - 7\cdot 3 = -37$.

2) Разлагая данный определитель, например, по элементам первой строки, получаем:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 8 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}(-4)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot 28-4\cdot(-46)+1\cdot(-22)=218.$$

Тот же результат получится, если воспользоваться формулой схемой треугольников:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 8 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 6+(-1)\cdot(-2)\cdot 1+4\cdot 5\cdot 8-8\cdot 3\cdot 1-$$

$$-2\cdot 5\cdot(-2)-4\cdot(-1)\cdot 6=218.$$

<u>Задание 2.</u> Найти сумму и разность матриц $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение: Здесь даны матрицы одного размера 3×2, следовательно, существуют их сумма и разность. Согласно определению алгебраической суммы матриц имеем

$$A+B=\begin{pmatrix} 2+7 & -1+5 \\ 3+2 & 0-3 \\ -5+0 & -2+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 5 & -3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 2-7 & -1-5 \\ 3-2 & 0-(-3) \\ -5-0 & -2-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 3 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

<u>Задание 3.</u> Вычислить: $A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Воспользуемся правилом умножения матриц:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},\text{ где}$$

$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+a_{i3}\cdot b_{3j}$, при $i\in\{1, 2, 3\}$, $j\in\{1, 2, 3\}$. Получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 3+1\cdot(-1)+2\cdot 3 & 1\cdot 1+1\cdot 6+2\cdot(-3) & 1\cdot 0+1\cdot 3+2\cdot 1 \\ 0\cdot 3+1\cdot(-1)+1\cdot 3 & 0\cdot 1+1\cdot 6+1\cdot(-3) & 0\cdot 0+1\cdot 3+1\cdot 1 \\ 1\cdot 3+1\cdot(-1)+3\cdot 3 & 1\cdot 1+1\cdot 6+3\cdot(-3) & 1\cdot 0+1\cdot 3+3\cdot 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 11 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

<u>Задание 4.</u> Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} -x_1+2x_2+2x_3=-1 \\ \quad -3x_2-3x_3=0 \\ x_1-4x_2-5x_3=10 \end{cases}.$$

Решение. Решим систему методом Гаусса. Запишем матрицу B и приведем ее к ступенчатому виду.

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & -5 & 10 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot\left(-\tfrac{1}{3}\right) \\ +I \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 9 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \\ +II\cdot(2) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -2 & -2 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -9 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1) \end{array}$$ (жирным шрифтом выделены ведущие элементы).

$rang\,A = rang\,B = 3$, следовательно, система будет совместной и определенной.

Запишем ступенчатую систему на основе полученной ступенчатой матрицы.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = -9 \end{cases}$$

Значение $x_3 = -9$ подставим во второе уравнение системы и выразим $x_2 = 9$. Затем, значения $x_2 = 9$ $x_3 = -9$ подставим в первое уравнение системы и вычислим $x_1 = 1$.

Проверка: $\begin{cases} -1+2\cdot 9+2\cdot(-9)=-1 \\ -3\cdot 9-3\cdot(-9)=0 \\ 1-4\cdot 9-5\cdot(-9)=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1=-1 \\ 0=0 \\ 10=10 \end{cases}.$

Ответ. Система имеет единственное решение:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 9 \\ x_3 = -9 \end{cases}.$$

<u>Задание 5.</u> Вычислить обратную матрицу A^{-1} , если $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Решение. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ = $rang\,A$ =3, значит, матрица A обратима.

Вычислим A^{-1}.

1. Метод элементарных преобразований: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +I \end{array}$ ~

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} -II \\ \\ +II\cdot(-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ +III\cdot 0{,}25 \\ \cdot 0{,}25 \end{array} \sim$$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right)$**.** Таким образом, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$

2. С помощью алгебраических дополнений:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \| A_{ij} \|^{t} (1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n).$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (3 + 1 + 0) - (1 - 1 + 0) = 4 \neq 0.$$ Поэтому A^{-1} обратима.

Вычисляем алгебраические дополнения элементов данной матрицы, не забывая о их знаках:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4,\ A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1,\ A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4,\ A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2,\ A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,\ A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{t} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$

Задание 6. Решить уравнение: $A \cdot X = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. $|A| \neq 0$, поэтому решением уравнения будет матрица $X = A^{-1} \cdot B$. Вычислим A^{-1} с помощью элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -I \cdot 3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +II \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :(-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

Следовательно, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. $X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

Проверка: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

2. Решить уравнение: $Y\cdot C = D$, где $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$|C| \neq 0$, поэтому решением уравнения будет матрица $Y = D \cdot C^{-1}$.

Вычислим $C^{-1} = \frac{1}{|C|} \cdot ||C_{ij}||^t = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = D \cdot C^{-1} = \quad =$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание 7. Решить систему линейных уравнений: 1) используя правило Крамера; 2). методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение: 1. Решим систему методом Крамера. Главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по элементам первой строки, пользуясь формулой

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot1\cdot2 + 5\cdot1\cdot1 + (-1)\cdot2\cdot1 - (1\cdot1\cdot1 + 1\cdot2\cdot3 - 1\cdot5\cdot2) = 12 \neq 0$$

Запишем и вычислим вспомогательные определители:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 12 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12\cdot1\cdot2 + 3\cdot1\cdot1 + (-1)\cdot2\cdot3 - (3\cdot1\cdot1 + 1\cdot2\cdot12 - 3\cdot2\cdot1) = 0;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot3\cdot2 + 5\cdot3\cdot1 + 12\cdot2\cdot1 - (1\cdot3\cdot1 + 3\cdot2\cdot3 - 2\cdot5\cdot12) = -84;$$

$$\Delta x_3=\begin{vmatrix}3 & -1 & 12\\ 5 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=3\cdot1\cdot3+5\cdot1\cdot12+(-1)\cdot3\cdot1-(1\cdot1\cdot12+1\cdot3\cdot3-1\cdot5\cdot3)=60;$$

Тогда $x_1=\dfrac{\Delta x_1}{\Delta}=\dfrac{0}{12}=0$; $x_2=\dfrac{\Delta x_2}{\Delta}=-\dfrac{84}{12}=-7$; $x_3=\dfrac{\Delta x_3}{\Delta}=\dfrac{60}{12}=5$.

2. Решим систему методом Гаусса, для этого составим расширенную матрицу системы и упростим ее приведением к треугольному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -1 & 1 & 12\\ 5 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2 & 3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 3\\ 3 & -1 & 1 & 12\\ 5 & 1 & 2 & 3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & -4 & -5 & 3\\ 0 & -4 & -8 & 3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4}\\ 0 & 0 & -3 & -15\end{array}\right)$$

Таким образом, система равносильна системе

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=3\\ \quad x_2+\dfrac{5}{4}x_3=-\dfrac{3}{4}\\ \quad\quad -3x_3=-15\end{cases}$$

Находим $x_3=5$

$$x_2=-\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\cdot5=-\frac{28}{4}=-7$$

$$x_1=12-7-5=0$$

Ответ: $x_1=0$, $x_2=-7$, $x_3=5$

При решении всеми методами одной и той же системы, мы получим один ответ.

<u>Задание 8.</u> Показать, что система имеет единственное решение

$$\begin{cases}2x-3y+z=13\\ 4x+7y\quad=-13\\ -x-2y+5z=4\end{cases}$$

Решение: Данная система имеет размер 3×3 (три уравнения и три неизвестных). Составим матрицу A из коэффициентов при неизвестных:

$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & 7 & 0\\ -1 & -2 & 5\end{pmatrix}$. Матрица A квадратная (3×3). Вычислим определитель матрицы Δ, используя формулу его разложения по элементам первой строки:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & 7 & 0\\ -1 & -2 & 5\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}7 & 0\\ -2 & 5\end{vmatrix}+(-3)\cdot\begin{vmatrix}4 & 0\\ -1 & 5\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}4 & 7\\ -1 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot35+(-3)\cdot(-20)+1\cdot(-1)=129.$$

Так как определитель системы $\Delta=129\neq0$, то данная система имеет единственное решение. Это решение можно найти по правилу Крамера: $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$; $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$; $z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$, где $\Delta=129$ - главный определитель системы; Δ_x, Δ_y, Δ_z - вспомогательные определители, которые получаются из главного путем замены соответствующего столбца на столбец свободных членов, и вычисляются аналогично определителю Δ.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 13 & -3 & 1 \\ -13 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 13\cdot 7\cdot 5 + (-3)\cdot 0\cdot 4 + 1\cdot(-13)\cdot(-2) -$$

$$-1\cdot 7\cdot 4 - (-3)\cdot(-13)\cdot 5 - 13\cdot 0\cdot(-2) = 455 + 26 - 28 - 195 = 258;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 13 & 1 \\ 4 & -13 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot(-13)\cdot 5 + 13\cdot 0\cdot(-1) + 1\cdot 4\cdot 4 -$$

$$-1\cdot(-13)\cdot(-1) - 13\cdot 4\cdot 5 - 2\cdot 0\cdot 4 = -130 + 16 - 13 - 260 = -387;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 13 \\ 4 & 7 & -13 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 7\cdot 4 + (-3)\cdot(-13)\cdot(-1) + 13\cdot 4\cdot(-2) -$$

$$-13\cdot 7\cdot(-1) - (-3)\cdot 4\cdot 4 - 2\cdot(-13)\cdot(-2) = 56 - 39 - 104 + 91 +$$

$$+ 48 - 52 = 0.$$

Отсюда по правилу Крамера имеем:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{258}{129} = 2; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-387}{129} = -3;$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{0}{129} = 0.$$

Решение системы единственно, решением является упорядоченная совокупность чисел $(2; -3\,0)$.

Ответ: $(2; -3\,0)$.